Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM)

Reflexiones y Propuestas en Educación Matemática

Editor: Uldarico Malaspina Jurado

DEPARTAMENTO
ACADÉMICO
DE **CIENCIAS**
SECCIÓN MATEMÁTICAS

ET LUX IN TENEBRIS LUCET
MCMXVII
PUCP

Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM)

Reflexiones y Propuestas en Educación Matemática

Editor: Uldarico Malaspina Jurado

Departamento de Ciencias
Sección Matemáticas

Reflexiones y Propuestas en Educación Matemática

Editor: Uldarico Malaspina Jurado
Primera edición, Diciembre 2014
Tiraje: 100

Diseño de carátula: Editorial Moshera S.R.L.
Diagramación de interiores: Moisés Samuel Toledo Julián

Avenida Universitaria 1801, Lima 32
626 2000-anexo 4151
E-mail: irem@pucp.edu.pe
Dirección URL: `http://www.pucp.edu.pe/irem/index.html`

ISBN: 978-612-46647-5-5
Hecho el Depósito Legal en la
Biblioteca Nacional del Perú: 2014-18174

Impreso en Editorial Moshera S.R.L.
Jr. Tacna 2969, San Martín de Porres
Telefax: 567-9299
editorialmoshera@hotmail.com

Presentación

El Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (IREM-PUCP) publica este libro con el propósito de seguir contribuyendo a la reflexión sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los diversos niveles educativos y a la implementación de medidas que mejoren su calidad, en el marco de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.

Los artículos que presentamos corresponden a sistematizaciones de trabajos realizados por miembros del IREM en dos de sus líneas de investigación: Currículo y formación de profesores y Tecnologías y medios de expresión en enseñanza de las matemáticas, con motivo de conferencias o talleres de trabajo con profesores de secundaria y con formadores de profesores, en el marco de las actividades del proyecto MATEMÁTICAS 2013: DE LA PUCP AL PERÚ (`http://www.ecsing.pucp.edu.pe/matematica_2013.php`).

Decidimos reunirlos en forma de libro, como una manera de difundir perspectivas, consideraciones teóricas y uso de recursos tecnológicos en torno a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que esperamos sean útiles a profesores, a diseñadores de planes de estudio, a matemáticos y a todos los que comparten con nosotros el propósito de dialogar e interactuar para mejorar la calidad de la educación matemática en nuestro país.

Agradecemos el apoyo brindado por la Pontificia Universidad Católica del Perú para hacer posible esta publicación.

Los autores.

Contenido

Creación de problemas en la docencia e investigación

Uldarico Malaspina Jurado y Estela Vallejo Vargas
umalasp@pucp.edu.pe y e.vallejo@pucp.pe
Pontificia Universidad Católica del Perú/IREM-PUCP

Resumen

En el presente artículo se exponen reflexiones sobre la creación de problemas como parte de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y como parte de la tarea de investigación en educación matemática. Las reflexiones son basadas en experiencias desarrolladas con profesores en formación y en ejercicio en talleres realizados en el Perú y en varios países latinoamericanos, así como en las experiencias de asesoría de tesis de maestría en enseñanza de las matemáticas. Se hacen propuestas de estrategias para estimular el desarrollo de la capacidad de crear problemas en los profesores de matemáticas, a partir de episodios en clases. Se destaca la importancia de estimular la capacidad de formular preguntas y de justificar las afirmaciones que se hacen en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Palabras clave: creación de problemas, resolución de problemas, episodios en clases, formulación de preguntas, justificaciones.

Importancia de la creación de problemas

Es clara la importancia de resolver problemas como parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; sin embargo se pone poco énfasis en la creación de problemas. Ciertamente, los problemas tienen que haberse creado antes para poder resolverlos, pero la creación de problemas no debe verse como una tarea exclusiva de expertos, ni considerar que los problemas a trabajar en clases deben ser únicamente aquellos que figuran en los libros o en internet. Crear problemas es parte fundamental de la tarea docente. Cada profesor conoce la realidad específica en su aula, el entorno sociocultural y las motivaciones de sus alumnos y es un desafío profesional para él, tanto crear secuencias de actividades y problemas adecuados para esa realidad, como estimular a sus alumnos no solo a resolver problemas, sino a "ir más allá": a crear sus propios problemas.

Los docentes debemos estimular lo más posible la creatividad de nuestros alumnos en el aprendizaje de las matemáticas y si bien es cierto que ésta se manifiesta "reactivamente" cuando ellos resuelven ingeniosamente problemas que les proponemos, estamos dejando de lado la creatividad "proactiva" si no los estimulamos a que ellos creen sus propios problemas de matemáticas. La realidad es rica en situaciones que permiten crear problemas, lo cual conlleva el identificarlos y el saber plantearse preguntas, que son capacidades fundamentales a desarrollar en nuestros alumnos, más aún en una perspectiva de "aprendizajes para la vida" y "en el día a día", que actualmente enfatiza el Ministerio de Educación del Perú. Crear problemas de matemáticas a partir de situaciones reales, contribuirá a tener una mirada más analítica de la realidad, que será útil no solo en el campo de las matemáticas.

Siendo tan importante que nuestros alumnos aprendan matemáticas no solo resolviendo sino también creando problemas, es esencial que los docentes desarrollemos la capacidad de crear problemas de matemáticas, para poder orientar adecuadamente el desarrollo de tal capacidad en nuestros alumnos.

En diversos trabajos de investigadores en educación matemática encontramos expresiones que destacan la importancia de la creación de problemas en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Así, ya en 1989 el National Council of Teachers of Mathematicas (NCTM) recomendaba a los profesores brindar oportunidades para que los estudiantes piensen matemáticamente y desarrollen sus conocimientos mediante la creación de problemas. Textualmente, decía: "los estudiantes deben tener algunas experiencias reconociendo y formulando sus propios problemas, actividad que es el corazón del hacer matemáticas" (p. 138). Recomendaba también que a los estudiantes se les dé oportunidades de formular problemas a partir de una situación dada y de crear nuevos problemas modificando las condiciones de un problema dado. (NCTM, 1991, p. 95).

Según Malaspina (2011)

> La actividad de crear problemas matemáticos complementa muy bien la de resolver problemas, porque estimula aún más la creatividad y contribuye a precisar la situación-problema, el lenguaje, los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que se espera manejen los estudiantes. (p. 236)

Más recientemente, Bonotto (2013) nos dice:

> El proceso de crear problemas representa una de las formas de auténtica investigación matemática, que adecuadamente implementada en actividades de clase, tiene el potencial de llegar más allá de las limitaciones de los problemas verbales, por lo menos como son típicamente tratados. Impulsar la creación de problemas es una de las formas de lograr el desarrollo de diferentes potencialidades de los estudiantes y de estimular una mayor flexibilidad mental. (p. 53)

A continuación resumimos las razones didácticas e investigativas que considera Malaspina (2013a) en relación a la importancia de la creación de problemas:

► Razones didácticas
• En la enseñanza (creación de problemas por los profesores)
Contribuye a:

a) Proponer problemas que sean cercanos a las motivaciones de los alumnos y a los contextos en los que viven.

b) Crear secuencias de problemas de dificultad gradual que lleven a un problema particularmente importante.

c) Proponer problemas que recojan las iniciativas, percepciones o interrogantes de los alumnos, que contribuyan a aclarar o ampliar sus ideas, ante el reto de resolver problemas o de comprender temas de matemáticas.

d) Proponer problemas y actividades que respondan a las orientaciones generales que suelen darse en los diseños curriculares y documentos complementarios desde los organismos centralizados de educación.

e) Llenar el vacío que hay en la mayoría de textos de matemáticas, sobre todo en los de nivel escolar.

f) Tener problemas adecuados para aplicar las teorías sobre educación matemática, fuertemente apoyadas en la resolución de problemas.

g) Mejorar la calidad de las evaluaciones.

h) Consolidar la formación matemática de los profesores.

• En el aprendizaje (creación de problemas por los alumnos)
Contribuye a:

a) Desarrollar la creatividad.

b) Motivar más el estudio.

c) Fortalecer las capacidades de resolver problemas, de formular(se) preguntas, de identificar problemas y de investigar.

d) Ver aspectos matemáticos en el medio que los rodea.

e) Establecer conexiones entre la matemática y otros campos del conocimiento.

f) Ampliar la visión de las matemáticas.

g) Adquirir una formación matemática más sólida (son experiencias que van más allá de lo operativo y de los problemas tipo).

h) Fortalecer la autoestima del alumno.

► Razones investigativas
Contribuye a:

a) Estimular la capacidad de formularse preguntas (esencial en la investigación).

b) Estimular la capacidad de identificar problemas y formular modelos matemáticos.

c) Estimular y desarrollar la creatividad.

d) Aplicar y continuar investigaciones sobre educación matemática basadas en la resolución y creación de problemas.

Problemas y creación de problemas

Para precisar lo que entendemos por crear problemas, seguiremos la posición adoptada en Malaspina (2013a):

La creación de problemas matemáticos es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema

- a partir de un problema dado (**variación** de un problema); o
- a partir de una situación (**elaboración** de un problema).

> La situación puede ser dada, o configurada como parte de la elaboración del problema. En el primer caso es una situación tal como se presenta en la realidad; y en el segundo es una situación imaginada, adecuadamente presentada.

Para desarrollar esta perspectiva sobre la creación de problemas, es importante precisar los elementos fundamentales que percibimos en los problemas:

Información

Requerimientos

Contexto

Entorno matemático

La información está constituida por los datos cuantitativos o relacionales que se dan en el problema.

El requerimiento es lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, que puede ser cuantitativo o cualitativo, incluyendo gráficos y demostraciones.

En cuanto al contexto: suele llamarse "problema contextualizado" a aquel que está relacionado con alguna situación real, con la vida cotidiana; sin embargo, consideraremos que el contexto también puede ser formal o estrictamente matemático. En ese sentido, podemos afirmar que en un problema, el contexto puede ser intra matemático o extra matemático. En el primer caso, como su nombre lo indica, el problema se circunscribe a lo matemático (por ejemplo, hallar el dominio de una función, graficar una ecuación de dos variables y hallar los factores primos de un número natural, son problemas que tienen contexto intra matemático). En el segundo caso, el problema está más vinculado a una situación real.

El elemento entorno matemático se refiere a los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema. Ciertamente esto es relativo, pues depende del camino que se siga para resolver el problema. En el marco de la creación de problemas para el aprendizaje, el entorno matemático puede ser el punto de partida para la creación de nuevos problemas, como "el tema a tratar". En un marco más amplio, puede ocurrir que un problema no se resuelva, precisamente por no encontrar el entorno matemático adecuado (como ocurrió durante mucho tiempo con algunos problemas famosos; quizás el más conocido es el de la conjetura de Fermat), pero quien resuelve un problema o intenta resolverlo, se apoya en un conjunto de conceptos matemáticos al que llamaremos entorno matemático. Evidentemente, no habiendo una única manera de resolver un problema, el entorno matemático no tiene que ser único y la misma información, requerimiento y contexto puede llevar a problemas diferentes, al precisar el entorno matemático que se debe usar para resolverlo.

Con estas precisiones, podemos ahora explicitar mejor lo que entendemos por variación y elaboración de un problema.

Variación de un problema dado: *proceso según el cual se construye un nuevo problema, modificando uno o más de los cuatro elementos del problema dado.*

Ejemplos muy interesantes de éstos son los que resultan de plantear generalizaciones a partir de un problema dado.

Elaboración de un problema: *proceso según el cual se construye un nuevo problema, a partir de una situación (dada, o configurada por el autor),*

- *cuyo contexto se origina en tal situación*
- *cuya información es obtenida por selección o modificación de la información que se percibe en la situación;*
- *y cuyo requerimiento es una consecuencia de relaciones lógicas y matemáticas establecidas o encontradas entre los elementos de la información especificada, que están implícitas en el enunciado, dentro de un cierto entorno matemático.*

La creación de problemas genera una dinámica matemática acompañada de lo didáctico, cuyas fronteras son difíciles de predecir, pues ya sea por variación o por elaboración, surgen preguntas cuyas respuestas pueden requerir un entorno matemático que va más allá de lo inicialmente considerado. Esto es interesante desde el punto de vista didáctico, porque permite ampliar la visión que suele tenerse de las matemáticas, como algo estático y acabado. Los docentes involucrados en la creación de problemas de matemáticas que sean más adecuados a los entornos sociales y regionales de sus alumnos, a sus motivaciones y a sus dudas, pueden convertir un problema difícil de resolver -haciendo variaciones adecuadas de él - en varios problemas más sencillos, con dificultad gradual, que finalmente conduzcan a la solución de tal problema y en el camino permita experiencias valiosas de aprendizaje. Una pregunta o una interpretación errada de un concepto pueden ser puntos de partida para crear un problema-porvariación de otro o por elaboración- cuya solución contribuya a aclarar dudas. Elaborar problemas con entorno extra matemático, tomando aspectos de la realidad cercana a los estudiantes, aportará a que tanto los que crean los problemas como los que los resuelvan tengan miradas más reflexivas de la realidad y encuentren las matemáticas que hay en ella.

Ejemplos
Presentaremos tres ejemplos de creación de problemas, mostrados en la conferencia ofrecida por Malaspina (2013a) en el VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, en Montevideo.

1) De ***elaboración*** de un problema:
Situación:
Se tiene un alambre flexible de 20 cm de longitud.

Problema creado:
Determinar el mayor número de cuadrados, con lados de longitud entera, que se puede formar con un alambre de 20 cm de longitud.

Información: Longitud del alambre.

Requerimiento: El mayor número de cuadrados con lados de longitud entera que se pueden formar.

Contexto: Extra matemático.

Entorno matemático: Geometría, cuadrados, perímetro; división entera.

2) De ***variación*** de un problema:

Problema:
Determinar el mayor número de cuadrados con lados de

longitud entera que se puede formar con un alambre de 20 **cm de longitud**.

Problema creado
Determinar el mayor número de triángulos no equiláteros, con lados de longitud entera, que se puede formar con un alambre de 20 **cm de longitud**.

Información: Longitud del alambre. (No modificada)

Requerimiento: El mayor número de triángulos no equiláteros, con lados de longitud entera, que se puede formar con un alambre de 20 cm de longitud. (Modificado)

Contexto: Extra matemático. (No modificado)

Entorno matemático: Geometría, triángulos, perímetro, relaciones entre longitudes de los lados de un triángulo; división entera. (Modificado)

3) De ***variación*** de un problema:

Problema:
Determinar el mayor número de triángulos no equiláteros, con lados de longitud entera, que se puede formar con un alambre de 20 **cm de longitud.**

Problema creado:
Examinar si un alambre de 36 **cm de longitud se puede cortar en** 4 **trozos de longitudes enteras diferentes, de modo que cada longitud en cm sea un número primo.**

Información: Longitud de un alambre (Modificado)

Requerimiento: Expresar 36 como suma de 4 números primos diferentes (Modificado)

Contexto: Extra matemático. (No modificado)

Entorno matemático: Teoría de números. Conjetura de Goldbach (Modificado)

Es interesante notar que el entorno matemático ha sido drásticamente modificado, pues se ha pasado de la geometría a la teoría de números. Ciertamente es natural crear nuevos problemas haciendo variaciones a éste; no solo cambiando la información (diversas longitudes del alambre), sino planteando una situación general (alambre de longitud entera n y examinar si se puede cortar en p trozos cuyas longitudes son números primos), lo que lleva a considerar diversos casos y demostraciones que van mucho más allá de las matemáticas de la educación secundaria, pues ya forman parte de un tema que sigue siendo motivo de investigación de grandes matemáticos, como es la conjetura de Goldbach (todo número par mayor que 2 se puede expresar como la suma de dos números primos).

Estimular el desarrollo de la capacidad de crear problemas

Consideramos muy importante desarrollar esta capacidad en los alumnos de todos los niveles educativos, desde la educación inicial hasta los niveles de posgrado. Esto conlleva que los profesores desarrollemos tal capacidad, combinando adecuadamente lo matemático y lo didáctico, de modo que la información, el requerimiento, el contexto y el entorno matemático correspondan al nivel educativo y tengan el grado de dificultad adecuado para que sea motivador y ayude al aprendizaje. En ese sentido, nuestra propuesta es que, como parte de la formación de los futuros profesores y de los profesores en ejercicio, se realicen talleres en los que se trabaje, individual y grupalmente, creando problemas de matemáticas.

Como lo hicimos en el VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (Malaspina, 2013b) y en varios otros cursos cortos con profesores en ejercicio, o como parte de un curso de matemáticas para futuros profesores de educación inicial y primaria, proponemos que se empiece a crear problemas de matemáticas haciendo variaciones a un problema dado, presentado en el marco de un episodio en clase. La idea del episodio en clase es ubicar el problema en un contexto didáctico, considerando reacciones de alumnos ante el problema propuesto y pedir al participante en el taller que - en un trabajo inicialmente individual y luego grupal - analice el episodio y cree dos problemas variando el problema dado:

- ► Uno, con el propósito de orientar a los alumnos a aclarar su comprensión del problema dado y a llegar a una solución correcta del mismo. A tal problema lo denominamos "*problema pre*".

- ► Otro, cuya solución se facilite por haber resuelto correctamente el problema dado en el episodio descrito; un problema con el propósito de retar a los alumnos a ir más allá de una solución correcta del problema dado. A tal problema lo denominamos "*problema pos*".

Cabe aclarar que los problemas que se creen pueden tener varias partes de dificultad gradual. Esto es particularmente útil en el problema pre.

La creación de los problemas pos, contribuirá a ampliar el panorama de las matemáticas, por ejemplo haciendo generalizaciones y buscando modelos matemáticos relacionados con el contexto del problema del episodio. Por otra parte, un problema pre, el problema del episodio y un problema pos, constituirán una secuencia de problemas, relacionados entre sí, con tres niveles de dificultad.

Ejemplo
Considere el siguiente episodio en clase:

En el grupo de estudios de matemáticas, el profesor propone el siguiente problema a los alumnos:

En la tienda ALFA, la primera semana de julio ofrecían todos sus productos sin descuento; la segunda semana, con un descuento del 20%; y la tercera semana, con un descuento adicional del 15%, lo cual anunciaron como GRAN DESCUENTO DEL 20% + 15% EN TODOS NUESTROS PRODUCTOS.

Examinar si es verdad que la tercera semana de julio la tienda ALFA ofreció sus productos con el 35% de descuento, respecto a los precios de la primera semana.

Después de unos minutos:

- La mayoría dice que sí, que es verdad.
- Juan y Carla dicen que no, que el descuento de la tercera semana fue menos del 35%
- María dice que el descuento de la tercera semana fue del 68%

Algunos *problemas pre* propuestos por los profesores:

Problema pre *1* (Trabajo individual)

Rosa compra una blusa que tiene precio de 100 nuevos soles, pero con un descuento del 20% por remate de saldos y un descuento adicional del 10% por tener tarjeta de la tienda. ¿Qué porcentaje de descuento tuvo finalmente María en la compra de la blusa?

La idea manifestada por la autora del problema fue considerar un precio cuyos porcentajes fueran muy fáciles de calcular, para que los alumnos concentren su atención en el descuento total. Es claro que hizo modificación cuantitativa en la información y que el contexto (extra matemático) lo ha presentado de manera distinta, manteniendo la idea fundamental del problema del episodio.

Problema pre *2* (Trabajo individual)

En un remate de saldos de temporada, una tienda durante una semana hace el descuento del 50% en todos sus productos textiles y la siguiente semana hace un descuento adicional del 50%. ¿Cuál es el porcentaje de descuento total que hace durante la segunda semana?

La idea manifestada por el autor del problema fue llamar la atención de los alumnos para que no obtengan el descuento total como una simple suma de porcentajes, porque no resulta intuitivo que en la segunda semana el descuento total sea del 100%. También se ha hecho una modificación cuantitativa en la información.

Problema pre *3* (Trabajo grupal.)

(La autora del problema pre *1* integró este grupo)

Rosa compra una blusa que tiene precio de 100 nuevos soles, pero con un descuento del 20% por remate de saldos y un descuento adicional del 10% por tener tarjeta de la tienda.

a) *¿Cuánto paga María por la blusa si la compra en la segunda semana?*

b) *El precio que paga en la segunda semana, ¿qué porcentaje es del precio de la blusa sin descuentos?*

c) *¿Cuál es el porcentaje total de descuento de la blusa en la segunda semana?*

La idea manifestada por el grupo fue que este problema ayudaría a distinguir más claramente entre lo que se paga y el descuento, que parece ser la confusión que tiene la alumna María en el episodio presentado, pues aparentemente hizo bien sus operaciones, pero no distinguió entre lo que paga (el 68% del precio inicial) y el descuento total (que es el 32%, que se obtiene de la resta 100 - 68). Se han hecho modificaciones cuantitativas en la información y se ha ampliado el requerimiento.

En cuanto a los problemas pos, la mayoría de los que presentaron fueron similares al del problema del episodio, con otros precios y en algún caso, considerando tres descuentos sucesivos; es decir, fundamentalmente con variaciones cuantitativas en la información.

A continuación algunos problemas pos que no son del tipo que acabamos de describir:

Problema pos *1* (Trabajo grupal)

Pedro y Juan compraron un terno cada uno. Pedro lo compró con un descuento del 20% más otro descuento adicional de 20% y Juan lo compró con un descuento del 30% más otro descuento adicional de 10%. ¿Cuál de ellos obtuvo un mayor descuento?

Los integrantes del grupo manifestaron que con este problema se reforzaría la comprensión de que el descuento total no es una simple suma. La modificación de la información no es solo cuantitativa. Se añade información que lleva a la comparación de resultados para satisfacer el requerimiento también modificado.

Problema pos *2* (Trabajo grupal)

En una tienda, si se compra con una tarjeta para hacer el pago luego de 30 días de efectuada la compra, el precio se recarga en un 10% y si el pago es entre los días 31 y 35 posteriores al día de la compra, *se hace un recargo adicional de 5%. Si Juan hizo una compra con este sistema el día 20 de agosto y pagó el día 23 de setiembre ¿qué porcentaje de recargo pagó?*

Los integrantes del grupo manifestaron que habiendo entendido que para los descuentos acumulados no se hace una simple suma, también lo deberían extender para los casos de recargos. Esencialmente es una modificación cuantitativa y cualitativa de la información.

Otros problemas pos (Propuestos por el autor)

3. Si la tienda BETA hace un descuento de fin de temporada del p%, más otro adicional del q%, ¿cuál es el descuento total, en porcentaje, respecto al precio sin descuento?

4. Si Juan recibió en el 2012 un aumento del p% respecto a su sueldo del 2011; y en el 2013 ha recibido un aumento del q% respecto a su sueldo del 2012 ¿Cuál es el porcentaje de aumento total respecto a su sueldo del 2011?

5. Sara recibió en el 2013 un aumento del 25% respecto a su sueldo del 2012. ¿Qué porcentaje de aumento debe recibir en el 2014, respecto a su sueldo del 2013, para que el porcentaje de aumento total respecto del sueldo del 2012 sea del 35%?

Como puede verse, en el problema 3 la variación que se hace al problema es modificar la información, al considerar porcentajes cualesquiera de descuentos acumulados; es decir, se está haciendo una generalización y la respuesta requiere no solo comprensión sino manipulación algebraica. Más aún, para la secundaria o las matemáticas básicas de la educación superior, puede usarse para visualizar la aplicación de la composición de funciones; en este caso, de dos funciones lineales, que es también una lineal:

Descuento del p%:
Precio inicial $x \to$ nuevo precio: $(1 - \frac{p}{100})x = f(x)$
Descuento del q%:
Precio inicial $w \to$ nuevo precio: $(1 - \frac{q}{100})w = g(w)$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\text{Descuento del p\%}"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & \underset{\text{(Nuevo precio)}}{f(x) = \left(1 - \frac{p}{100}\right) x = w} \arrow[d, "\text{descuento del q\%}"] \\
& \underset{\text{(Precio final, con los descuentos acumulados)}}{g(w) = \left(1 - \frac{q}{100}\right)\left(\left(1 - \frac{p}{100}\right) x\right) = g(f(x))}
\end{tikzcd}$$

Como

$$(1 - \frac{q}{100})(1 - \frac{p}{100})x = (1 - \frac{p + q - \frac{pq}{100}}{100})x$$

el descuento total es

$$(p + q - \frac{pq}{100})\%.$$

Es fácil ver que para el problema del episodio mostrado, $p = 20$ y $q = 15$. Haciendo el reemplazo correspondiente, se obtiene que el descuento total es del 32%.

Ciertamente, no se trata de obtener una fórmula para memorizarla, sino de ilustrar la generalización y usarla para sacar algunas conclusiones. Por ejemplo, de la conmutatividad de la adición y de la multiplicación, podemos concluir que el descuento acumulado total será el mismo indiferentemente del orden en que se apliquen los descuentos; es decir, si es el p% ó el q% de descuento que se aplica primero.

El problema *4* presenta también una situación general, similar a la del problema *3*. Hay una modificación de la información que conlleva una modificación natural en el requerimiento, al considerar aumentos y no descuentos.

El problema *5* presenta modificaciones cuantitativas, cualitativas y relacionales en la información, pues las cifras son diferentes, se trata de aumentos y no de descuentos; y se conoce el porcentaje de aumento inicial y el del aumento total acumulado. El requerimiento también está siendo modificado, pues se pide determinar uno de los porcentajes de aumentos acumulados.

Si x es el sueldo en el 2012 (obviamente diferente de cero),por el aumento del 25% asignado, el 2013 el sueldo será de $1,25x$. Como en el 2014, según el requerimiento del problema, el sueldo debe ser $1,35x$, al considerar un aumento del q% para el 2014, respecto al sueldo del 2013, debe cumplirse que

$$(1+q)1,25x = 1,35x$$

de donde $q = 0,08$ lo cual significa que el aumento requerido es del 8%. Notar que la respuesta no depende del monto del sueldo recibido en el 2012.

Experiencias de creación de problemas en tesis de alumnos de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas

En esta sección mostramos ejemplos de problemas creados con alumnos de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, como parte del trabajo de investigación en el desarrollo de sus tesis para su graduación.Hemos seleccionado algunos de los problemas creados por cinco tesistas, asesorados por el profesor Uldarico Malaspina, que fueron aplicados en sus respectivas experiencias de investigación. Los tres primeros problemas fueron aplicados en la (i) Educación Secundaria; mientras que los otros dos fueron aplicados en la (ii) Educación Superior.

Específicamente, en el apartado (i), presentamos los problemas 1 y 3, que fueron trabajados con alumnos de primer grado de secundaria, y el problema 2 que fue trabajado con alumnos de cuarto grado de secundaria. Por otro lado, en el apartado (ii), presentamos el problema 1, que fue trabajado con alumnos del primer ciclo de Ciencias Administrativas y Contables, y el problema 2 que fue trabajado con alumnos del primer ciclo de Arte y Diseño Gráfico Empresarial.

Las experiencias didácticas que resumimos a continuación nos muestran quelos investigadores que tengan un enfoque constructivista de la enseñanza de las matemáticas, encontrarán en la creación de problemas un medio importante para desarrollar investigaciones que enfaticen en el estudio razonado, creativo y constructivo de cualquier objeto matemático. Nuestra labor como profesores es desarrollar nuestra capacidad de crear problemas y así ser capaces de responder a las inquietudes y dudas de nuestros alumnos planteándoles nuevos problemas que los lleven a entender cuestiones que surgen en nuestras mismas clases y también puedan conducirlos a entender problemas más complejos. Al crear problemas adecuados podemos ir midiendo el nivel de la adquisición de diversos conocimientos matemáticos, los cuales pueden ser además graduados en su dificultad, de acuerdo al planteamiento que formulemos. Una manera interesante de desarrollar esta capacidad es la que proponemos en este artículo, que es seguir, por ejemplo, las estrategias de creación de problemas propuestas en secciones precedentes.

Muchas de las tesis de maestría en enseñanza de las matemáticas están orientadas a presentar propuestas concretas de enseñanza de diversos tópicos de matemática, dentro de un marco teórico específico. La propuesta requiere de problemas originales con propósitos concretos y que se adecúen a un nivel determinado. Por ello, es importante para los investigadores conocer estrategias para la creación de problemas de matemáticas, que las implementen, las examinen y las mejoren, al tiempo que desarrollan esta habilidad.

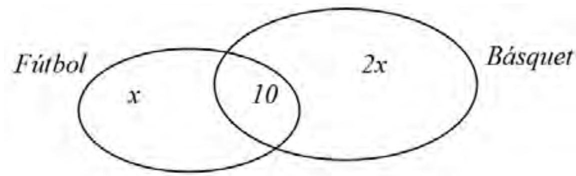
Es importante mencionar que las propuestas de enseñanza de las matemáticas contenidas en las tesis pueden ayudar directamente a los profesores en su ejercicio docente diario, pues son parte de investigaciones formales que les permitirá complementar sus conocimientos de matemática y de didáctica. Los trabajos dan ideas para mejorar o reemplazar ejercicios meramente repetitivos por problemas que requieren el uso de razonamientos y contienen propuestas concretas sobre los planteamientos hechos en el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular del Perú.

A continuación presentamos cinco problemas, que son parte de investigaciones realizadas sobre enseñanza de las matemáticas según lo detallado previamente.

i. Educación Secundaria

Problema 1

Juan preguntó a 40 alumnos si practican básquet o fútbol. Al terminar de preguntar, Juan se inventó un problema e hizo el siguiente gráfico.



Observando el gráfico,

a) Escribe el problema que tú piensas que inventó Juan.

b) Plantea una ecuación para resolver el problema que inventaste.

c) Resuelve el problema usando la ecuación.

Este problema fue creado en el marco de la **tesis** "*Errores que presentan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de problemas con ecuaciones lineales*", **elaborada por** *Luz Milagros Azañero Távara*, con el **propósito** de examinar las dificultades que presentan los alumnos ante el requerimiento de pasar de un registro algebraico a un registro verbal.

Cómo se aplicó

Se aplicó a 29 estudiantes de Primer año de secundaria de un colegio parroquial de San Isidro, Lima, el 2012.

Algunas respuestas interesantes

[Alumno 1]
Para el ítem (a):

10 alumnos juegan fútbol y basquet. Pero los que practican solo basquet son el doble de los que practican solo fútbol, si son 40 alumnos ¿Cuantos practican solo fútbol

La representación verbal
corresponde a la
representación algebraica

Observemos que la estudiante escribió correctamente el enunciado del problema de acuerdo a la información con la que contaba en el respectivo registro algebraico. Notemos además, que el problema planteado por la alumna cuenta con los elementos básicos de todo problema (información, requerimiento, contexto y entorno matemático). La alumna ha realizado una adecuada conversión del registro algebraico al registro verbal, llegando a cumplir con el propósito de esta actividad.

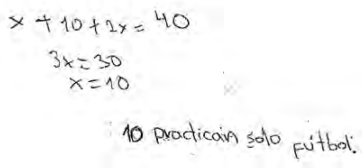
Para el ítem (b):

$$x+10+2x=40$$
$$3x=30$$
$$x=10$$

Correcto planteamiento

Observemos que la estudiante se excedió respecto al requerimiento específico de este ítem. Sin embargo, realizó un adecuado tratamiento en el registro algebraico.

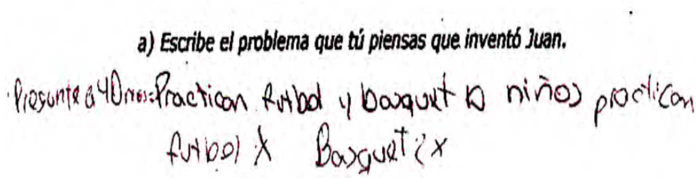
Para el ítem (c):



Solución correcta

Para el ítem (c), notemos que la estudiante resolvió correctamente el problema y respondió al requerimiento que ella misma estableció al crear su problema en el ítem (a).

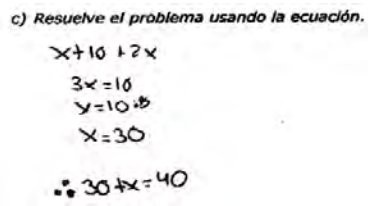
[Alumno 2]
Para el ítem (a):



Notemos que la estudiante escribió el enunciado del problema solo con los datos que se proporcionan en la representación algebraica dada. Sin embargo, no formuló algunas de las condiciones con precisión. Por ejemplo, la alumna escribió: "*futbol x; básquet 2x*". Observemos que era necesario que la alumna especifique que "x" es en realidad el número de alumnos que juegan solo futbol; mientras que "*2x*" es el número de alumnos que juegan *solo* básquet. Esto, porque los alumnos que *juegan futbol* y los alumnos que *juegan solo futbol* no necesariamente son el mismo conjunto. Esto mismo sucede con los alumnos que *juegan básquet* y los que *juegan solo básquet.*

Asimismo, la alumna no plantea requerimiento alguno, lo que deja incompleto el planteamiento de su problema.

Para el ítem (c):



Observe que la alumna no realiza un adecuado tratamiento en el registro algebraico.

Notemos que la estudiante, en la primera línea, no plantea una ecuación, sino una expresión algebraica "$x + 10 + 2x$", y que a continuación plantea la ecuación "$3x = 10$", sin que exista una conexión entre la primera y segunda línea que la alumna escribe. Observemos además que después de esto la estudiante realiza un procedimiento incorrecto, lo que demuestra que tiene dificultades al resolver ecuaciones lineales y también que no realizó un adecuado tratamiento en el registro algebraico.

Comentarios

Es típico, o por lo menos más frecuente, que nos presenten una situación problema y que a partir de ella nos pidan plantear una ecuación y la resolución de esta última para responder a algún requerimiento específico. Sin embargo, pensamos que el fin de este problema es salir de lo tradicional, y sacar a los estudiantes de su "zona de confort" para que demuestren otro tipo de razonamientos y habilidades. Observamos que la autora de la tesis ha pretendido explorar cómo realizan sus alumnos el tránsito del objeto matemático 'ecuación lineal' por distintos registros de representación semiótica, lo que constituye un reto para los estudiantes ya que es una tarea poco usual en las clases de matemáticas. Se pretende además que el alumno dé rienda suelta a su creatividad y proponga un texto para la representación dada. Esta actividad es un buen ejemplo de que alumnos de nivel escolar son capaces de crear sus propios problemas de matemáticas. Cabe mencionar que en este caso se ha empleado una de las formas de creación de problemas de matemática presentadas en una sección previa, en la que nos proporcionan una situación a partir de la cual se debe construir un problema.

Problema 2

a) ¿Es verdad que al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y &= 5 \\ \quad y &= 2x-3 \end{cases}$$

la solución es $(3;2)$? Justificar

b) Encontrar un sistema de ecuaciones que tenga como solución a $(3;2)$

c) Escribir un problema cuya solución sea que Alejandro realiza en un día 3 viajes en metropolitano y 2 viajes en tren eléctrico y se obtenga resolviendo el sistema de ecuaciones encontrado en la parte (b).

Cabe aclarar que este problema ha sido creado en el contexto dado por los viajes de Alejandro a su trabajo, empleando cierto número de veces el Metropolitano y el tren eléctrico.

Este problema fue creado en el marco de la **tesis** "*Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la Teoría de Situaciones Didácticas*", **elaborada por** *Rocío Figueroa Vera*, con el **propósito** de explorar en los alumnos la habilidad de crear problemas a partir de un registro algebraico (sistema de ecuaciones).

Cómo se aplicó

Se aplicó a 12 alumnos del cuarto año de educación secundaria de una Institución Educativa privada de Lima. Este problema fue trabajado en forma grupal, formándose 6 grupos de 2 integrantes cada grupo y los estudiantes tuvieron la opción de usar el software GeoGebra.

Algunas respuestas interesantes

Sobre los ítems (a) y (b):

La autora de la tesis nos comenta que sus alumnos trabajaron de forma ordenada y sin complicaciones., y que, en particular, para el caso del ítem (b) la mayoría de los grupos realizó procedimientos algebraicos y hasta mentales para llegar a un sistema de ecuaciones con la solución requerida. Sin embargo, algunos grupos se valieron del software GeoGebra para descubrir un sistema de ecuaciones, graficando dos rectas cuyo punto de intersección era el punto $(3; 2)$.

Algunas de las respuestas para el ítem (b) fueron:

$\begin{cases} x+y &= 5 \\ y &= 2x-4 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y &= 5 \\ x-y &= 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y &= 5 \\ 2y+5 &= 3x \end{cases}$

Sobre el ítem (c):

Cuatro de los seis grupos lograron pasar correctamente del registro algebraico encontrado en el ítem (b) a un enunciado verbal.

Los grupos que tenían como sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y &= 5 \\ \quad\; y &= 2x - 4 \end{cases}$$

respondieron:

> *"Alejandro utiliza el tren eléctrico y el metropolitano para ir a trabajar. Se desea saber cuántos viajes realiza en cada uno, si el número total de viajes es 5 y el número de viajes en tren eléctrico es el doble del número de viajes en metropolitano, menos 4."*

Aquí uno de los grupos planteó la pregunta: ¿cuántos viajes en metropolitano y tren eléctrico realizó Alejandro?

El grupo que propuso el sistema

$$\begin{cases} x + y &= 5 \\ x - y &= 1 \end{cases}$$

escribió un enunciado que no correspondía al sistema que había planteado, pero su propuesta implicaba un sistema de ecuaciones que conducía a la solución pedida.

Comentarios

De nuevo, vemos que se plantea un problema poco usual en lo referido a sistemas de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y dos incógnitas. Lo más frecuente en los libros de texto de nivel escolar es encontrar ejercicios en los que se proporcionan sistemas de ecuaciones, o situaciones problema que involucra el planteamiento de un sistema de ecuaciones, y para los cuales se pide su solución. A diferencia de esto último, en la actividad planteada se propone un par ordenado específico que debe ser solución de algún sistema de ecuaciones; se pide a los alumnos que propongan un sistema de ecuaciones que tenga como solución el par ordenado dado, y que además formulen un problema en un contexto extra-matemático (con algunas ideas sugeridas), que tenga como solución el par ordenado dado.

Vemos que esta es otra forma original de incentivar en los alumnos la creación de problemas, a partir de una situación dada, y cómo esta forma de trabajar en matemática reta a los alumnos a desarrollar otras habilidades matemáticas.

Problema 3

1) Miguel plantea la siguiente conjetura:
   "Todo número natural tiene un número finito de divisores."
   Se te pide lo siguiente:

   a) Responde: ¿Es verdadera esta conjetura o puedes mejorarla?

   b) Justifica la conjetura dada por Miguel en el caso de que esta sea verdadera, o la conjetura mejorada.

2) Escribe dentro de los paréntesis **VERDADERO** ó **FALSO** según corresponda y **JUSTIFICA** cada una de tus respuestas.

   a) ¿El número 385 es múltiplo de 11? (____________)

   b) ¿El número $N = 21 \times 33$ es divisible por 7? (____________)

c) ¿El número 123 es múltiplo de 7? (__________)

c) Si sumas dos números cualesquiera divisibles por 4, ¿el resultado será SIEMPRE un número divisible por 4? (__________)

3) Completa los espacios en blanco usando alguna de las siguientes palabras: **NINGÚN**, **ALGÚN**, **TODO**, según corresponda. **JUSTIFICA** cada una de tus respuestas.

   a) "__________ número natural es múltiplo de sí mismo."
   b) "__________ natural es divisible por cero."
   c) "Cero es divisible por __________ número natural."
   d) "__________ divisor de 8 es divisor de 35."
   e) "El número 1 es divisible por __________ número natural."
   f) "__________ número par es también divisible por 3."
   g) "El número uno es divisor de __________ número natural."
   h) "Cero es múltiplo de __________ número natural."
   i) "__________ múltiplo de 5 es también múltiplo de 4."

Esta actividad (conjunto de problemas) fue creada en el marco de la **tesis** "*Análisis y propuesta en torno a las justificaciones en la enseñanza de la divisibilidad en el primer grado de secundaria*", **elaborada por** *Estela Vallejo Vargas*, con el **propósito** de verificar el progreso en la presentación de las justificaciones de alumnos de primer grado de secundaria sobre cuestiones relacionadas con la divisibilidad de números naturales.

Cómo se aplicó

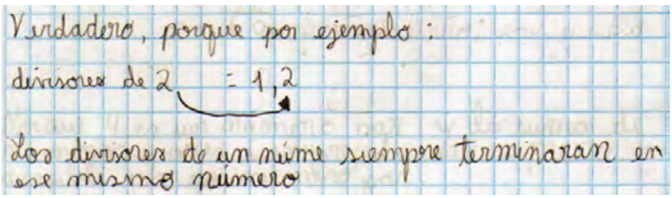
Se aplicó a 5 estudiantes del primer grado de secundaria de un colegio privado de Lima. Los estudiantes trabajaron esta actividad de manera individual.

Algunas respuestas interesantes

Para el ítem (1):

Este primer ítem fue creado con el propósito de que los alumnos, de manera individual, identifiquen que existe un caso para el cual no se cumple la conjetura dada por Miguel. En ese sentido, ellos debían precisar ("mejorar") esta conjetura, para luego justificarla. Es evidente que esta forma de trabajo en matemática no puede ser solicitada a un alumno que no ha sido previamente familiarizado en particular con la terminología empleada y, en general, con la forma de enseñanza de las matemáticas planteada por la autora de la tesis.

[Alumno 1]


Verdadero, porque por ejemplo:
divisores de 2 = 1,2
Los divisores de un núme siempre terminaran en ese mismo número

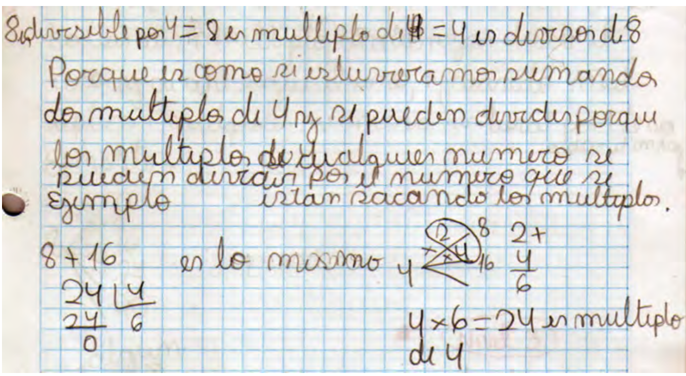
Por la respuesta que presenta ("Verdadero"), asumimos que el alumno considera que la conjetura de Miguel es verdadera. Podemos observar que la justificación que realiza con el propósito de demostrar la veracidad de esta conjetura se basa además en un ejemplo concreto, lo que según las consideraciones hechas por la autora, en su investigación, no es suficiente para que ésta sea considerada una demostración matemática. No obstante, la conclusión que el alumno hace al final de su respuesta, cuando escribe "Los divisores de un número siempre terminarán en ese mismo número", nos hace pensar que las consideraciones hechas por el alumno son generales ("un", haciendo referencia a un número cualquiera y "siempre", haciendo referencia a que se cumplirá en todos los casos). Esto nos hace pensar que el alumno justifica que todo número natural tiene un número finito de divisores porque considera que el conjunto de divisores siempre está acotado superiormente por el propio número.

Notemos que el estudiante no ha considerado el caso del número cero para la conjetura dada por Miguel, ya que el cero tiene infinitos divisores. En este sentido la conjetura de Miguel sí podía ser mejorada.

Para el ítem (2d):

Según la autora del problema, el propósito de este ítem es que el alumno presente una demostración matemática para este resultado, que es cierto.

[Alumno 2]


8 es divisible por 4 = 8 es multiplo de 4 = 4 es divisor de 8
Porque es como si estuvieramos sumando dos multiplos de 4 y se pueden dividir porque los multiplos de cualquier numero se pueden dividir por el numero que se estan sacando los multiplos.
Ejemplo
8 + 16 es lo mismo
24 | 4
24 6
0
4 ×6 = 24 es multiplo de 4

8 es divisible por 4 = 8 es múltiplo de 4 = 4 es divisor de 8 Porque es como si estuviéramos sumando dos múltiplos de 4 y se pueden dividir porque los múltiplos de cualquier número se pueden dividir por el número que se están sacando los múltiplos.
(Transcripción del texto presentado por el Alumno 2)

Observemos que el alumno empieza escribiendo:

"8 es divisible por 4 = 8 es múltiplo de 4 = 4 es divisor de 8"

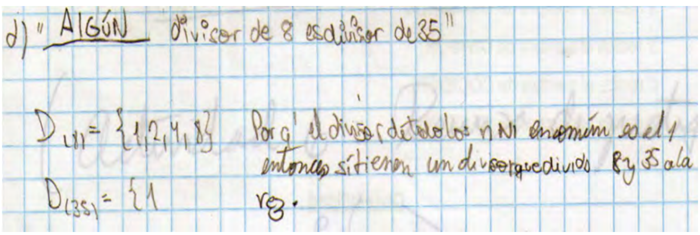
Vale la pena aclarar que el alumno toma en cuenta el trabajo realizado con la profesora (autora de la tesis), ya que emplea una de las equivalencias trabajadas con ella. Esta equivalencia establece que: "A es divisible por B equivale a decir que A es múltiplo de B, lo que equivale a su vez a decir que B es divisor de A. Donde A y B son números naturales, con B diferente de cero". De este modo notamos que el estudiante pretende justificar el resultado dado, basándose en la justificación de un resultado equivalente.

Aunque el estudiante no presenta una demostración matemática del resultado equivalente, puesto que su justificación se basa en un ejemplo, podemos observar que el alumno intenta hacer generalizaciones al decir "(...) porque los múltiplos de cualquier número se pueden dividir por el número (...)". Esto nos da indicios de que el alumno ha pensado originalmente en un caso general - el caso de los múltiplos de "N" y no de 4 en particular - y que para ayudar a hacer clara su justificación es que presenta un ejemplo concreto. Este ejemplo consiste en considerar dos múltiplos de 4 (8 y 16), los que ha obtenido al multiplicar a 4 por números naturales (2 y 4 respectivamente). El alumno parece darse cuenta de que cuando suma estos múltiplos de 4 (8 y 16), en el fondo lo que está haciendo es sumar los factores (2 y 4) con los que obtuvo los números originales, y luego multiplicar esta suma por 4, ya que 4 es un factor común. Así, como el resultado es un número que se obtiene al multiplicar 4 por un número natural(6), el resultado es también un múltiplo de 4.

Es importante destacar que esperar de los alumnos una demostración matemática para el resultado dado, parece ser un objetivo difícil de alcanzar, sobre todo tomando en cuenta que los estudiantes no estaban familiarizados con conocimientos sobre variables, lo que hubiese favorecido (desde el punto de vista de un matemático por ejemplo) la demostración del resultado. Sin embargo, pudimos explorar en las respuestas de los alumnos, y del Alumno 2 en particular, su capacidad de razonamiento analítico.

Para el ítem (3d):
Cabe mencionar que el propósito de todos los ítems del problema 3 (ítems 3a - 3i), tienen el objetivo que los estudiantes completen enunciados matemáticos incompletos para hacerlos proposiciones matemáticas verdaderas, mediante la precisión del uso de ciertos cuantificadores lógicos, y que además encuentren una manera de justificarlas.

[Alumno 3]

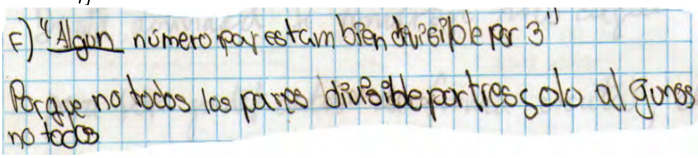

d) "ALGÚN divisor de 8 es divisor de 35"
$D_{(8)} = \{1, 2, 4, 8\}$
$D_{(35)} = \{1$
Porq' el divisor de todos los nº N en común es el 1 entonces sí tienen un divisor que divide 8 y 35 a la vez.

d) "ALGÚN divisor de 8 es divisor de 35" D(8)={1,2,4,8} D(35)={1 Porque el divisor de todos los n [queriendo decir números] N [queriendo decir naturales] es el 1. Entonces sí tienen un divisor que divide a 8 y 35 a la vez
(Transcripción del texto presentado por el Alumno 3)

Lo primero que observamos es, por ejemplo, que el alumno no termina de hallar los divisores del número 35. Creemos que no considera esto necesario ya que al haber encontrado el caso de un número que satisface la proposición que ha construido con el uso del cuantificador "algún", esto es suficiente para la demostración de su proposición.

Notemos además, que el alumno justifica que 1 es un divisor común para 8 y 35, ya que 1 es divisor de todos los números naturales.

Para el ítem (3f):
[Alumno 4]


F) "Algun número par es tambien divisible por 3"
Porque no todos los pares divisible por tres solo algunos no todos

f) "ALGÚN número par es también divisible por 3" Porque no todos los pares divisibles por tres solo algunos no todos.
(Transcripción del texto presentado por el Alumno 4)

Observemos que para justificar esta proposición es suficiente mostrar el ejemplo de un número natural que satisfaga la proposición dada por el alumno (por ejemplo 6, ya que 6 es un número par y es también divisible por 3). Sin embargo, lo que sugiere el alumno con su respuesta es que existen números pares que son divisibles por 3 (cuando dice: "solo algunos"), mientras que otros tantos números pares no lo serán (cuando dice: "no todos").

Comentarios

Observamos que la habilidad de crear problemas, por la autora de la tesis, ha sido necesaria para el desarrollo de la investigación realizada, y que se complementa bien con el enfoque original que ella plantea para la enseñanza de las matemáticas del nivel escolar. Crear problemas con propósitos específicos como son el análisis de conjeturas, la precisión de enunciados matemáticos para hacerlos proposiciones verdaderas, la justificación de las proposiciones dadas y de las que se originaron con las modificaciones de los estudiantes, etc., ha obligado a la investigadora, según nos señala, a hacerse preguntas del tipo ¿cómo logro esto?, ¿qué problemas conviene plantear con este propósito?, ¿serán los alumnos capaces de responder a este requerimiento según el nivel al que pertenecen?, ¿existirá otra manera de pedir lo mismo?, etc. Esto nos muestra, además, que partir de un propósito de enseñanza para un nivel educativo específico y hacerse preguntas adecuadas, contribuyen al éxito en la tarea docente de crear problemas cuya solución contribuya al aprendizaje de las matemáticas.

En conclusión, esta forma no tradicional de enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica Regular, mediada por justificaciones, se ha servido también de la tarea necesaria e importante de la creación de problemas adecuados a este enfoque.

i) Educación Superior

Problema 1: "Porcentaje y función lineal"

Un supermercado vende el kilo de carne a S/. 17,00 y esta semana está haciendo una promoción en la venta de carne: si la compra es por más de 3 kilos, hace un descuento del 10% al importe total.

a) ¿Cuánto pagará Carlos si compra 2 kilos de carne?

b) ¿Cuánto pagará Julia si compra 5 kilos de carne?

c) Expresar la función pago según la cantidad de kilos de carne (x) que se compre.

d) Graficar la función hallada en c).

e) Determinar, en caso sea posible, la cantidad de kilos que fueron adquiridos por los clientes en cada uno de los siguientes casos:

   e1) Pagó S/. 45

   e2) Pagó S/. 60

   e3) Pagó S/. 49

Este problema fue creado en el marco de la *tesis* "*Propuesta de una secuencia didáctica para la enseñanza de porcentajes a estudiantes de Administración y Sistemas* ", **elaborada por** *Judith Chávez Salinas*, con el **propósito** de identificar los problemas que podrían presentar alumnos universitarios con el manejo de las funciones lineales, relacionadas con porcentajes.

Cómo se aplicó

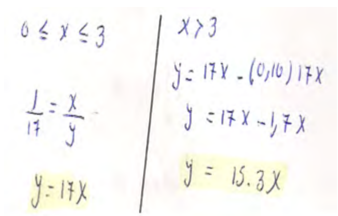
Se aplicó a 32 estudiantes del primer ciclo de la facultad de Ciencias Administrativas y Contables, carrera universitaria de Administración y Sistemas, de la Universidad Peruana Los Andes, de la ciudad de Huancayo.

El trabajo realizado se llevó a cabo en grupos de 3 o 4 estudiantes cada grupo.

Algunas respuestas interesantes

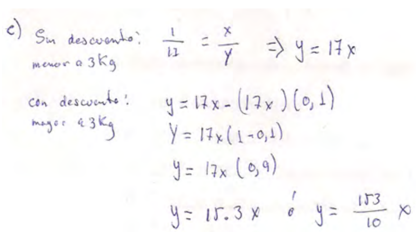
Para el ítem (c):

[Grupo 1]



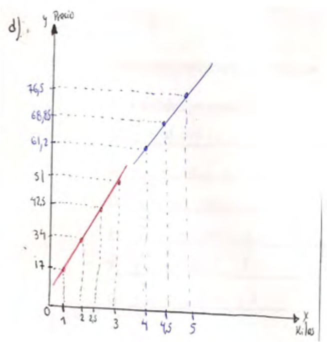
Grupo que especifica el dominio de la función y considera correctamente los dos casos

[Grupo 2]

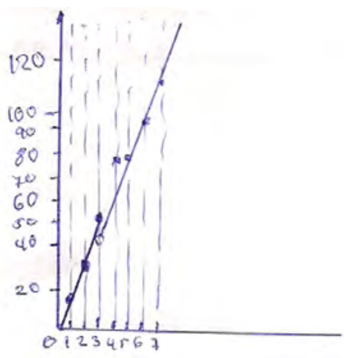


Grupo que considera correctamente los dos casos, pero no precisa el dominio de la función

Para el ítem (d):

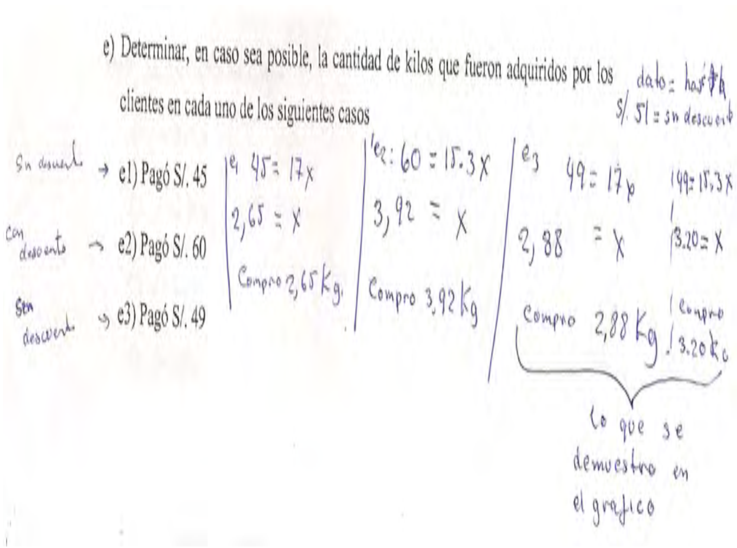


Un grupo trata de graficar ambas funciones en un solo plano, pero no tienen en cuenta los dominios de las funciones.



Este otro grupo es un poco más preciso y grafica ambas funciones teniendo en cuenta los dominios respectivos, pero las escalas utilizadas no son las más apropiadas ya que como se puede observar, el gráfico no es del todo exacto.

Para el ítem (e):



e) Determinar, en caso sea posible, la cantidad de kilos que fueron adquiridos por los clientes en cada uno de los siguientes casos

dato: hasta 4 kg
S/. 51 = sin descuento

Sin descuento → e1) Pagó S/. 45
e1 $45 = 17x$
$2,65 = x$
Compro 2,65 Kg.

Con descuento → e2) Pagó S/. 60
e2: $60 = 15.3x$
$3,92 = x$
Compro 3,92 Kg

Sin descuento → e3) Pagó S/. 49
e3 $49 = 17x$
$2,88 = x$
Compro 2,88 Kg

$49 = 15.3x$
$3.20 = x$
Compro 3.20 Kg

lo que se demostro en el grafico

Notamos, de la respuesta anterior, que el grupo no tuvo mayor complicación para los ítems (e1) y (e2) y que el ítem (e3) ha sido trabajado considerando las dos alternativas de precio; esto último, al parecer, como consecuencia de lo que observaron en el gráfico.

Por otro lado, observamos en la siguiente respuesta cómo este otro grupo solo trabajó con una opción de precio. La autorade la tesis considera que se debe básicamente a que los integrantes del grupo no lograron esbozar el gráfico donde podían observar mejor esta situación.

e).

e1) S/. 45

$y = 17x$

$45 = 17x$

$2{,}65 = x$ $\therefore$ Compraria 2,65 Kg.

e2). S/. 60

$y = 15{,}3\,x$

$60 = 15{,}3\,x$

$3{,}92 = x$ $\therefore$ compra 3,92 Kg

e3) S/ 49

$y = 17x$

$49 = 17x$

$2{,}88 = x$ $\therefore$ compraria 2,88 Kg.

Comentarios

Observamos que este problema cuenta con todos los elementos de un problema de matemática establecidos en una sección previa de este artículo. A diferencia de otros problemas, este problema no tiene como fin que los estudiantes creen sus propios problemas a partir de una situación dada. Es un problema creado con la iniciativa de la autora de la tesis y el propósito de esta actividad es que de manera gradual, a través de la secuencia de requerimientos que aquí se presenta, los estudiantes se enfoquen en el entorno matemático de funciones en un contexto extra-matemático.

Notamos que aunque el contexto del problema es sencillo, la secuencia de requerimientos que se origina a partir de éste permite que los estudiantes trabajen un tipo especial de funciones (funciones lineales por partes). Asimismo, reta a los estudiantes a presentar el gráfico y luego, gracias a la secuencia gradual de requerimientos, determinar los valores de la variable independiente que permiten cierto comportamiento en la variable dependiente.

Este problema presenta así una secuencia de requerimientos de dificultad gradual cuidadosamente elaborada con el fin que los estudiantes descubran aspectos importantes de las funciones lineales en contextos reales.

Cabe resaltar que la función lineal por tramos que resume la situación no es una función inyectiva y a esa particularidad se conduce al alumno en la secuencia que se presenta en el ítem e (ya que no se puede saber cuántos kilos de carne se compró si se pagó 49 soles).

Problema 2: "Construyendo un jardín"

Juan posee un terreno cuadrado y luego de recortarlo 2 m a cada lado, obtiene un jardín cuadrado cuya área no excede los 9 m^2.

Parte I: Trabajo individual

a) Emplea una variable x, e ilustra gráficamente la situación. Explica qué representa la variable.

b) Utilizando la variable que has definido en (a), representa el área del terreno y el área del jardín.

Área del terreno: ___________

Área del jardín: ___________

c) Expresa algebraicamente la relación que debe cumplirse para que el área del jardín no exceda los 9 m^2.

d) Encuentra dos posibles valores de la longitud de cada lado del terreno cuadrado.

e) Determina dos posibles valores que no puede tomar la variable definida en (a), según el contexto del problema.

f) Escribe la expresión obtenida en (c) de modo que se tenga $f(x) \leq 0$, siendo f una función cuadrática.

g) Grafica la función f y determina gráficamente el conjunto de valores de x para los cuales se cumple que $f(x) \leq 0$.

h) Encuentra todos los posibles valores de la longitud de cada lado del terreno cuadrado.

Parte II: Trabajo grupal
Todos los integrantes del grupo deben comparar y examinar los resultados obtenidos en el trabajo individual.
Entregar la hoja del trabajo individual con las soluciones que el grupo considera más adecuadas, para las partes f, g y h.

Parte III: Trabajo grupal
María tiene un terreno cuadrado de 6 metros por lado y quiere comprar dos franjas de terreno a sus vecinos, de modo que su terreno siga siendo cuadrado, pero de un área que no exceda los 64 m^2.

a) Emplear una variable x, e ilustrar gráficamente la situación. Explicar qué representa la variable.

b) Utilizando la variable definida en (a), representar el área del terreno ampliado.
Área del terreno ampliado: ____________

c) Expresar algebraicamente la relación que debe cumplirse para que el área del terreno ampliado no exceda los 64 m^2.

d) Encontrar dos posibles valores de la longitud de cada lado del terreno cuadrado ampliado. ¿Cuáles son los dos correspondientes valores de la variable x?

e) Determinar dos valores que no puede tomar la variable x definida en (a), según el contexto del problema.

f) Escribir la expresión obtenida en (c) de modo que se tenga $f(x) \leq 0$, siendo f una función cuadrática.

g) Graficar la función f y determinar gráficamente el conjunto de valores de x para los cuales se cumple que $f(x) \leq 0$.

h) Encontrar todos los posibles valores del ancho de las franjas con las que se puede ampliar el terreno, según la condición dada.

Este problema fue creado en el marco de la **tesis** "*La resolución de problemas con inecuaciones cuadráticas. Una propuesta en el marco de la teoría de situaciones didácticas*", **elaborada por** *Nixo Núñez Sánchez*, con el **propósito** de favorecer el aprendizaje de los procesos de resolución de una inecuación cuadrática correspondiente a un problema contextualizado cuando el trinomio cuadrático es factorizable en $\mathbb{R}$ y con desigualdad $\leq$.

Cómo se aplicó

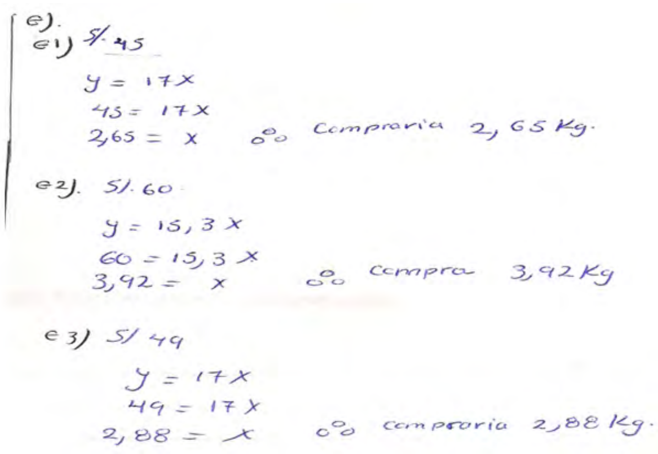
Se aplicó a 26 estudiantes del primer ciclo de la escuela de Arte y Diseño Gráfico Empresarial de la Universidad Señor de Sipán del distrito de Pimentel de la provincia de Chiclayo, departamento de Lambayeque.

En la parte del trabajo grupal se formaron 8 grupos de 3 integrantes cada grupo, y se formó un único grupo de dos integrantes.

Algunas respuestas interesantes

Para el ítem (a):

Observamos a continuación el tipo de respuesta correcta que presentaron 15 de los 26 estudiantes a este ítem. En esta respuesta los estudiantes detallan la representación gráfica y explican qué representa la variable x.


e).
e1) S/. 45
$y = 17x$
$45 = 17x$
$2{,}65 = x$ ∴ Compraría 2,65 Kg.
e2). S/. 60
$y = 15{,}3x$
$60 = 15{,}3x$
$3{,}92 = x$ ∴ Compra 3,92 Kg
e3) S/ 49
$y = 17x$
$49 = 17x$
$2{,}88 = x$ ∴ compraría 2,88 Kg.

Por otro lado, según nos comenta el autor de la tesis, los otros 11 estudiantes tuvieron dificultades para representar la variable x.

Ante esta situación, el profesor-investigador "devuelve el problema" a los alumnos planteando la siguiente pregunta: ¿Cuánto mide el terreno?

Esto les sirvió para representar el lado del terreno por una variable "x", lográndose determinar que la variable representaba la medida del terreno.

Para los ítems (b) y (c):
Según lo señalado por el autor de la tesis, los estudiantes resolvieron

estos ítems sin indicaciones específicas logrando representar algebraicamente el área del terreno y el área del jardín. Solo 2 de los 26 estudiantes no pudieron representar correctamente el área del jardín con la condición solicitada porque confundieron la relación de la desigualdad $\leq$ con $\geq$.

Para los ítems (d) y (e):
Como nos manifiesta el autor de la tesis, estas dos preguntas hicieron reflexionar a todos los estudiantes porque demoraron en seleccionar los valores para que "x" cumpla con las condiciones del problema. Después de realizar los cálculos correspondientes, 11 estudiantes determinaron los dos posibles valores solicitados, 12 estudiantes determinaron un solo valor y 3 alumnos cometieron errores en los cálculos.

Para los ítems (f), (g) y (h):
Los estudiantes tuvieron dificultades inicialmente para entender el ítem (f), pero posteriormente determinaron la expresión indicada. En los resultados se obtuvo que 24 alumnos identificaran la función cuadrática, solo 3 realizaron la gráfica correctamente y fue lo que les tomó más tiempo.

Por falta de tiempo, 18 alumnos no respondieron el ítem (h) y 8 lo graficaron incorrectamente, este ítem fue considerado para ser tratado de forma grupal.

Para la actividad grupal parte II:
Con los indicios de los trabajos individuales se pudo afianzar sus respuestas en los trabajos grupales donde se pudo coordinar respuestas y comunicar resultados. Los grupos graficaron correctamente la parábola con la determinación de su vértice y la intersección con el eje de abscisas, solo 2 grupos tuvieron errores al determinar el vértice. En la pregunta (h) existieron dificultades para determinar los valores de la longitud del terreno.

Para la actividad grupal parte III:
Todos los 9 grupos identificaron correctamente la función cuadrática $f(x) = (6 + x)^2 - 64$; 4 grupos realizaron la gráfica de esta función en un plano cartesiano correctamente; 4 cometieron errores al ubicar el vértice en el plano cartesiano, lo que influyó en la determinación de la intersección de la gráfica con el eje de abscisas; 1 grupo no logró responderlo.

Con respecto a la pregunta (h), se observaron mayores dificultades para identificar los valores del ancho de la franja. Ante esta situación, el profesor-investigador devuelve el problema a sus alumnos, frente a la dificultad que estos manifiestan para el desarrollo de la pregunta (h). Los estudiantes mencionaron por ejemplo: "*Profesor esta pregunta es similar a la pregunta del terreno y el jardín, en este caso, ¿cómo determino los valores de "x" que representa al ancho de las franja compradas?*"
El profesor-investigador sugirió que observaran el gráfico correspondiente a la pregunta (g) y a partir del intervalo identificado como respuesta de esta pregunta, deduzcan todos los valores de "x" que representa el ancho de las franjas.

Esta sugerencia sirvió para que determinaran algunos valores, que fueron específicamente números enteros, luego hubo discusión donde se observó bastante interacción entre los integrantes del grupo para corregir sus respuestas. Finalmente 5 grupos determinaron una cantidad limitada de valores para el ancho de la franja, no identificaron todos los valores correspondientes, 4 grupos no respondieron esta pregunta.

Comentarios

La secuencia de actividades en el problema presentado tiene una estructura especial ya que tiene un trabajo individual, y dos partes grupales. De estas dos últimas partes se considera una primera con el propósito de comunicar para luego discutir las respuestas de los estudiantes integrantes de cada grupo; en un segundo momento del trabajo grupal se tiene como fin desarrollar una nueva secuencia de requerimientos con el propósito de trabajar una situación similar a la presentada inicialmente cuya solución se facilita al haber resuelto adecuadamente la primera situación planteada.

De este modo, podemos observar que en la tesis se propone una secuencia didáctica con el claro propósito de analizar los procesos de resolución de inecuaciones cuadráticas como las involucradas en el problema presentado.

Referencias

Azañero Távara, M. (2013). *Errores que presentan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de problemas con ecuaciones lineales.* (Tesis de maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics.* 83 (1), 37 - 55.

Chávez Salinas, J. C. (2013). *Propuesta de una secuencia didáctica para la enseñanza de porcentajes a estudiantes de Administración y Sistemas.* (Tesis de maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Figueroa Vera, R. E. (2013). *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la Teoría de Situaciones Didácticas.* (Tesis de maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Malaspina, U. (2011). *Intuición y resolución de problemas de optimización. Un análisis ontosemiótico y propuestas para la educación básica.* Alemania: Lap Lambert Academic Publishing GMBH & Co.KG - Editorial Académica Española.

Malaspina, U. (2013a). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. Conferencia en *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.* (pp. 117-128) MONTEVIDEO: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.
Recuperado de: http://www.cibem.org/home.php, http://www.cibem.org/paginas/img/resumenes.pdf

Malaspina, U. (2013b). Nuevos horizontes matemáticos mediante variaciones de un problema. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, No. 35, Set., pp. 135 - 143.
Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/35/archivo12.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston, VA: NCTM

Núñez Sánchez, N. (2012). *La resolución de problemas con inecuaciones cuadráticas. Una propuesta en el marco de la teoría de situaciones didácticas.* (Tesis de maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Vallejo Vargas, E. A. (2012). *Análisis y propuesta en torno a las justificaciones en la enseñanza de la divisibilidad en el primer grado de secundaria.* (Tesis de maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Conexiones entre la geometría sintética y la geometría analítica: Un estudio en el contexto de la Educación Básica en el Perú

Cecilia Gaita Iparraguirre y Francisco Ugarte Guerra
cgaita@pucp.edu.pe y fugarte@pucp.edu.pe
Pontificia Universidad Católica del Perú/IREM-PUCP

Resumen

En este artículo se presentan algunos resultados de investigaciones en donde se analiza la forma en la que se organizan actualmente algunos tópicos fundamentales de matemáticas en la Educación Básica, en particular aquellos relacionados con el álgebra, la geometría y la geometría analítica. Se darán también algunas recomendaciones para su reorganización y tratamiento.

Palabras clave: geometría analítica, geometría sintética. lugar geométrico, conexiones matemáticas.

Introducción

Desde hace varias décadas, el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que se desarrollan en contextos con intencionalidad didáctica ha formado parte de la agenda de investigación de grupos de matemáticos, educadores y psicólogos. Sin embargo, es recién desde hace alrededor de treinta años, que se plantea un estudio científico de los fenómenos relacionados con un proceso de instrucción matemática. Como resultado de ello, se han propuesto varias teorías que pretenden explicar distintos aspectos de este fenómeno tan complejo que es aprender matemáticas.

Las teorías desarrolladas por distintos grupos de investigadores fijan su atención en diversos focos. Por ejemplo, algunas estudian el proceso de transformación que sufren los objetos matemáticos con una intencionalidad didáctica y en la forma en la que éstos se organizan en los currículos; otras se centran en estudiar las construcciones mentales que se llevan a cabo al aprender determinados tópicos matemáticos; mientras que algunas otras posturas teóricas buscan establecer el efecto que tiene en los aprendizajes el usar algún instrumento tecnológico.

Sin embargo, sea cual sea el foco de atención elegido, el fin último es que estas investigaciones tengan un efecto en la reorganización de los conocimientos matemáticos en los planes de estudios de los distintos niveles educativos y en la forma de abordarlos.

A continuación se describirán resultados de una investigación de Didáctica de la Matemática que plantea reorganizar la enseñanza de la geometría analítica a partir de la geometría sin coordenadas y del álgebra.

Sobre el álgebra, la geometría y la geometría analítica

Uno de los temas fundamentales en todos los currículos de matemáticas es la geometría, pero también lo es el álgebra; y, desconectado de todo lo anterior, en los últimos años de la secundaria y en los primeros años de las carreras universitarias aparece la geometría analítica.

En el DCN (2009) se señala que una de las tres componentes del área de matemáticas presente en todos los niveles de la Educación Básica es la de Geometría y Medición, además de la de Números, Relaciones y Operaciones; y Estadística.

En la Educación Primaria, los conocimientos que se espera alcancen los alumnos se describen en términos de objetivos de aprendizaje; a continuación se detallan los que corresponden a Geometría y Medición, en los tres ciclos de la educación primaria.

Tabla 1: La Geometría en la Educación Primaria en el Perú

Ciclo III de la EB	**Ciclo IV de la EB**	**Ciclo V de la EB**
• Resuelve situaciones cotidianas que requieran de la medición y comparación de atributos mensurables de objetos y eventos, y las comunica utilizando lenguaje matemático.	• Resuelve y formula problemas con perseverancia y actitud exploratoria, cuya solución requiera de las relaciones entre los elementos de polígonos regulares y sus medidas: áreas y perímetros, e interpreta sus resultados y los comunica utilizando lenguaje matemático.	• Resuelve y formula problemas cuya solución requiera de la transformación de figuras geométricas en el plano, argumentando con seguridad, los procesos empleados y comunicándolos en lenguaje matemático.
• Resuelve problemas, con autonomía y seguridad, cuya solución requiera de relaciones de posición y desplazamiento de objetos en el plano.	• Interpreta y valora la transformación de figuras geométricas en distintos aspectos del arte y el diseño.	• Resuelve y formula problemas cuya solución requiera de relaciones métricas y geométricas en la circunferencia, círculo, prisma recto y poliedro; argumentando con seguridad, los procesos empleados en su solución, y comunicándolos en lenguaje matemático.

En este nivel educativo, se propone tratar a las figuras geométricas, basándose en la aplicación de transformaciones en el plano, en particular de la simetría respecto de un eje y de la traslación. Se enfatiza también en que se comprendan los atributos mensurables de los objetos, así como en el empleo de unidades, sistemas y procesos de medida, y la aplicación de técnicas, instrumentos y fórmulas apropiadas para obtener medidas. En todos los casos, se usan relaciones métricas previamente establecidas con las que se realizan cálculos.

Notemos que sólo en sexto grado, cuyos contenidos se describen en la siguiente tabla, se señala el uso de instrumentos de dibujo para la construcción de ángulos sin embargo, esto se refiere sólo al uso del transportador, no se hace referencia a la construcción de figuras haciendo uso de regla y compás para resolver los problemas.

Tabla 2: Capacidades y conocimientos de Geometría en el sexto grado de la Educación Primaria en el Perú

Capacidades	**Conocimientos**
• Mide y construye ángulos utilizando instrumentos de dibujo geométrico.	• Ángulos.
• Interpreta la rotación a 90º y 180º de figuras, estableciendo sus coordenadas de posición.	• Rotación de 90º y 180º de figuras geométricas.
• Resuelve problemas que implican la traslación y rotación de figuras.	• Traslación y rotación de figuras geométricas.

• Interpreta y mide la superficie de polígonos.	• Área de polígonos regulares simples y compuestos.
• Resuelve problemas sobre polígonos.	• Circunferencia y círculo.
• Interpreta y compara circunferencias de diferentes radios.	• Área lateral y total de prismas rectos.
• Calcula y estima el área de un círculo por composición de figuras.	• Área lateral y total de poliedros regulares.
• Resuelve problemas que implican el cálculo de la circunferencia y del área del círculo.	• Volumen de sólidos en unidades arbitrarias de medida.
• Identifica elementos en el prisma recto y en el poliedro.	
• Resuelve problemas que implican el cálculo del área lateral y total de un prisma recto y de poliedros.	
• Mide y compara el volumen de sólidos en unidades arbitrarias de medida.	

En relación a la componente Geometría y Medición, en los dos últimos ciclos considerados en la Educación Secundaria, se plantean los siguientes objetivos

Tabla 3: La Geometría en la Educación Secundaria en Perú

Ciclo VI de la EB	**Ciclo VII de la EB**
Resuelve problemas que relacionan figuras planas y sólidos geométricos; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático.	Resuelve problemas que requieren de razones trigonométricas, superficies de revolución y elementos de Geometría analítica; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático.

Se puede observar que en la secundaria el tratamiento de la Geometría y Medición se centra en analizar las propiedades, los atributos y las relaciones entre objetos de dos y tres dimensiones. Se trata de establecer la validez de conjeturas geométricas por medio de la deducción y la demostración de teoremas y criticar los argumentos de los otros. No se observa que se trabajen técnicas de construcciones con regla y compás en este nivel. Por otro lado, se plantea comprender y representar traslaciones, reflexiones, rotaciones y dilataciones con objetos en el plano de coordenadas cartesianas; visualizar objetos tridimensionales desde diferentes perspectivas y analizar sus secciones trasversales.

Sin embargo, pese a que las transformaciones geométricas pueden estudiarse desde el álgebra, no se plantea hacerlo de esa forma. Es más, en este mismo ciclo pero en otra componente, la de Números, relaciones y funciones, se plantea introducir el álgebra a través del estudio de expresiones algebraicas y de las operaciones que se definen entre ellas, sin ninguna conexión con los conceptos geométricos estudiados previamente.

Respecto a los conocimientos geométricos específicos involucrados, a continuación se describen los que se consideran en el último ciclo de este nivel pues es allí donde está previsto un mayor tiempo para su estudio.

Tabla 4: Conocimientos de Geometría del cuarto grado de Secundaria en Perú

Geometría plana	**Geometría analítica**
• Semejanza de triángulos y Lema de Tales. Relaciones métricas en el triángulo rectángulo. Teorema de Pitágoras. Área de regiones formadas por una circunferencia inscrita o circunscrita en un polígono. Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. • Geometría del espacio. Área de la superficie de la esfera. Volumen de la esfera. Área lateral y volumen de un tronco de prisma.	• Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. Ecuaciones de la recta: punto-pendiente, ordenada en el origen y ecuación general. Posiciones relativas de dos rectas: rectas paralelas y rectas perpendiculares. Ángulo entre dos rectas.

Se presentan primero los conocimientos asociados a la geometría plana, sin coordenadas, que requiere del empleo de relaciones entre los diferentes elementos de cada figura, luego se presentan sólidos geométricos tales como la esfera y el prisma y, finalmente, se consideran conocimientos de geometría analítica.

Las dos geometrías, la geometría sin coordenadas y la geometría analítica, se presentan de manera independiente, abordando problemas de distinta naturaleza. Por un lado, se realizan cálculos de longitudes de segmentos, áreas y distancias, utilizando los teoremas o resultados dados o demostrados previamente y por otro, se determinan ecuaciones de rectas, se calculan ángulos y distancias, empleando para ello las expresiones analíticas dadas con anterioridad.

No se observa el tratamiento de problemas en contexto de geometría plana que puedan ser resueltos de manera más eficiente con técnicas de geometría analítica.

Se puede concluir entonces que durante la Educación Básica, el énfasis está puesto en la geometría euclidiana que aborda propiedades relativas a tamaños, distancias, ángulos, áreas y volúmenes, que conducen por lo tanto a la medición de magnitudes. Mientras que, solamente en el último ciclo se trabajan algunos temas de geometría con coordenadas. Así, no se muestra ninguna conexión entre las geometrías sintética y analítica.

La organización de los temas en campos del conocimiento aislado uno de otro responde a querer estudiar a profundidad cada tópico. Sin embargo, esta división del conocimiento en campos disjuntos resulta artificial cuando se estudia la evolución de la matemática.

Consideramos que es necesario que un profesor de matemáticas pueda establecer conexiones entre distintos tópicos matemáticos. Esto puede hacerse a través del estudio de los resultados obtenidos por investigadores del campo de conocimiento Didáctica de la Matemática. También puede conseguirse a través de la revisión de textos de distintas épocas en los cuales se pueden encontrar problemas que, con una transformación adecuada, podrían emplearse en las aulas.

Sobre lo que se plantea hacer en este trabajo

Planteamos la pregunta de si es posible establecer conexiones entre el álgebra, la geometría sin coordenadas y la geometría analítica.

Para responder esa pregunta, seguiremos los siguientes pasos:

a) Describiremos de qué manera se conectan algunos tópicos de geometría con el álgebra.

b) Haremos un estudio del papel que cumplía la geometría sintética en la época previa a la Matemática Moderna con la intención de rescatar sus potencialidades para el desarrollo de un pensamiento matemático.

c) Identificaremos situaciones en contexto geométricos para las que la geometría analítica proveerá herramientas de solución más potentes, de modo que éstas puedan ser incorporadas en la Educación Básica.

Sobre las estructuras algebraicas y la geometría

El tema de reflexión propuesto se remonta a los años sesenta cuando se introdujeron modificaciones en los programas de secundaria, respondiendo al movimiento denominado Matemáticas Modernas, según refiere Thom (en Piaget, Choquet, Dieudonné y Thom, 1986, p.116). Antes de las reformas en los currículos de matemáticas propuestos por este movimiento, la geometría ocupaba un lugar importante en los planes de estudio de la primaria, secundaria y en la educación superior. Se consideraba el estudio de las construcciones exactas con regla y compás y también la presentación axiomática desarrollada por Euclides.

Luego, basándose en la consigna de que la introducción temprana a las estructuras generales traería como consecuencia una economía del pensamiento, se introdujeron nuevos temas en los programas de la Educación Básica entre los que destacaron la Teoría elemental de conjuntos, el desarrollo de nociones algebraicas y el estudio de algunas funciones elementales como la función logaritmo y exponencial, considerados conocimientos elementales previos al cálculo. Estas modificaciones se hicieron a cambio de suprimir la geometría euclidiana tradicional.

Sobre los argumentos que se dieron en su momento para eliminar la geometría euclidiana tradicional, Thom señala que los trabajos sobre los Fundamentos de Geometría de Hilbert pusieron de manifiesto que el pretendido rigor de los Elementos de Euclides no era tal, pues estaba mezclado con un empleo abundante de la intuición.

De esta manera, se justificaba el reemplazar la geometría euclidiana tradicional por el álgebra a partir de la definición del espacio cartesiano como un espacio vectorial de dimensión dos, con una forma bilineal definida positiva. A partir de ello, se podía iniciar a los alumnos en el conocimiento de las estructuras fundamentales. Sin embargo, en la actualidad en la escuela tampoco se estudian estructuras algebraicas a partir de los objetos geométricos.

Debido a la gran influencia que tuvo esta corriente, la geometría sintética quedó fuera de los planes de estudio de matemática en todos los niveles (Piaget et al, 1986), esto es, se dejaron de lado las construcciones con regla y compás. Así, la geometría que se abordaba en la escuela mostraba a la geometría euclidiana como el estudio del grupo ortogonal sobre un espacio. Actualmente, todavía se pueden encontrar indicios de esta situación ya que en todo programa de geometría en la educación primaria y secundaria están presentes las transformaciones en el plano.

Félix Klein, a través del programa de Erlangen (1872) tuvo el mérito de distinguir entre las distintas geometrías que hasta ese entonces se habían desarrollado al margen de una concepción unificadora, según

Alsina y Trillas (1992). Así, Klein planteo identificar dos elementos fundamentales:

- Un espacio E: que puede ser cualquier conjunto no vacío, por ejemplo un conjunto finito de elementos, la recta $\mathbb{R}$, el espacio $\mathbb{R}^3$.
- Un grupo $G(E)$ de transformaciones de dicho espacio que como mínimo contiene a la identidad y está contenido en el grupo de todas las posibles biyecciones de E en E.

Con el par $[E, G(E)]$ se podrían clasificar las figuras, o subconjuntos no vacíos de E, de acuerdo con las transformaciones de $G(E)$ y según el siguiente criterio:

Dos figuras F y F' de E son equivalentes, y se escribe $F \sim F'$ si, y sólo si, existe una transformación T en $G(E)$ que transforme F en F', es decir $T(F) = F'$.

Con las exigencias dadas, se puede verificar que la relación $\sim$ es de equivalencia. El ser una relación de equivalencia facilita una clasificación de las figuras del espacio: en cada clase de figuras aparecen unas figuras dadas y todas las obtenidas a partir de éstas mediante las transformaciones consideradas.

Sobre un mismo espacio pueden considerarse diferentes grupos de transformaciones, dando lugar con ello a diferentes geometrías: existen tantas geometrías como posibles subgrupos del grupo de biyecciones del espacio en sí mismo. Así, se concibe a la geometría como el estudio de las propiedades invariantes de ciertas relaciones generalizadas de equivalencia, de modo que una geometría se distingue de otra por el grupo de transformaciones características.

De esta manera, la geometría se definió haciendo uso de estructuras algebraicas y de objetos del álgebra lineal.

Para el caso particular de las geometrías de $\mathbb{R}^3$, atendiendo a la definición dada por Klein en la que una geometría está determinada por el conjunto de invariantes se han considerado las siguientes geometrías:

Tabla 5: Clasificación de las geometrías según invariantes

Geometría	**Transformaciones**	**Invariantes**
Equiforme	Semejanzas	Ángulos, paralelismo, razones dobles
Euclidiana	Isometrías	Distancias, ángulos, paralelismo, razones dobles
Afín	Afinidades	Paralelismo, razones dobles
Proyectiva	Proyectividades	Razones dobles

Según esto, en la Geometría Euclidiana las transformaciones consideradas son las isometrías o movimientos rígidos. En estas transformaciones las distancias, ángulos, ortogonalidad y paralelismo se preservan; no pasa lo mismo con la posición.

Sobre el papel de la geometría sintética

El éxito histórico de los Elementos es que la geometría euclidiana, en el sentido de geometría sintética, "constituyó el primer ejemplo de transcripción de un proceso espacial bi o tridimensional al lenguaje unidimensional de la escritura" (Piaget et al, 1986, p.124). Así, constituyó un proceso explícito de cambio de registro de representación. Se tiene entonces que la función primordial del lenguaje geométrico es la de describir los procesos espacio temporales que nos rodean; la geometría es un intermediario natural, y tal vez insustituible, entre el lenguaje habitual y el lenguaje formalizado de las matemáticas, lenguaje en el que el objeto se ha reducido al símbolo y el grupo de equivalencias a la identidad del símbolo consigo mismo. Desde este punto de vista, podríamos decir que el estadio del pensamiento geométrico es algo imposible de suprimir en el desarrollo normal de la actividad racional del hombre.

Además, existen problemas clásicos de geometría con una amplia gama de dificultades que podrían abordarse en la educación básica y superior, pero no sucede lo mismo con el álgebra, donde los problemas propuestos en el nivel básico o en los primeros cursos de universidad, son simples ejercicios donde se aplica alguna regla de cálculo conocida o donde se emplea un teorema en el que basta reemplazar un valor o donde se deben emplear argumentos de álgebra teórica, que están muy por encima de la capacidad promedio de los alumnos. La tendencia de sustituir la geometría por el álgebra es muy negativa y debe revertirse.

Vagn Lundsgaard Hansen (en Mammana, 1998) menciona que en muchos países las construcciones con regla y compás han desaparecido de los sílabos a pesar que muchas veces puede resultar una muy buena forma de aproximarse a una situación dada; incluso, en algunos casos estas construcciones eran usadas para acrecentar el interés por las matemáticas de jóvenes talentosos.

Por lo tanto la exclusión de la geometría euclidiana de los currículos de matemáticas, a favor de la inclusión del álgebra, no fue la decisión más acertada. Por esa razón, se están realizando trabajos para revalorar la geometría sintética, ya que ella “hace referencia continuamente a una intuición subyacente, lo que le otorga un mayor significado que al álgebra” (Piaget et al 1986, p.119).

Las actividades de construcciones de figuras concretas con regla y compás harán que emerjan formas abstractas así como sus propiedades.

Es necesario buscar los medios para reintegrar los valores de esta geometría al mundo de la geometría moderna. En particular, muchos problemas sobre construcciones geométricas deberían ser trasladados al lenguaje matemático moderno y deberían enfocarse desde nuevas perspectivas, de modo que puedan volver a despertar el interés. La inclusión de distintos programas de geometría dinámica, desarrollados en los últimos años, será una herramienta fundamental para ello.

Sobre las conexiones que pueden establecerse entre la geometría sintética y la analítica

De otro lado, Vagn Lunsgaard Hansen (en Mammana, 1998) señala que los métodos propios de la geometría analítica están presentes en los currículos de secundaria de muchos países; sin embargo, el tratamiento que se da a temas como las cónicas es superficial y sin aplicaciones, lo que podría ocasionar que este tema desaparezca del currículo.

Planteamos que es posible conectar estas dos preocupaciones: la recuperación de los problemas de construcciones con regla y compás, y su conexión con la geometría analítica. Esto tendría como consecuencia la reorganización de la Geometría en la secundaria, de modo que se recuperen las construcciones con regla y compás y luego se hagan las conexiones respectivas con la Geometría Analítica.

Para hacerlo, se requiere identificar problemas en contextos geométricos cuya solución sea compleja o imposible de realizar utilizando los métodos propios de la geometría sintética pero que, con los procedimientos propios de la geometría analítica, presenten un tratamiento trivial.

Del estudio del desarrollo de la geometría analítica se tiene que un hito importante lo constituye el trabajo de Descartes y Fermat en el siglo 17, vinculando geometría y álgebra, a través de la geometría analítica. El método de solución de este campo de conocimiento se caracteriza por sustituir las figuras por números o incógnitas, entre las que se deben establecer relaciones que deriven en un sistema de ecuaciones que luego deberá resolverse, (Descartes, 1954).

Una de las principales razones por las que evolucionaron las técnicas de la geometría analítica fue la búsqueda por parte de Descartes y Fermat de generalización del problema de Pappus. Este problema sobre lugares geométricos fue redactado en un contexto de geometría sintética pero, para su generalización, fueron necesarias técnicas propias de la geometría analítica. Así, el papel de los problemas de lugar geométrico fue fundamental en la emergencia de la geometría analítica.

Se propone rescatar problemas de lugares geométricos que en un primer momento tengan como solución rectas y circunferencias pero que luego, con una modificación adecuada de las variables, tengan como solución lugares geométricos más complejos. De esta manera, se justificará la emergencia de la geometría analítica y sus procedimientos.

Conclusiones

Del estudio del Diseño Curricular Nacional, se observa que en los primeros ciclos de la Educación Básica se trabaja con formas geométricas planas, especialmente polígonos y circunferencias, se identifican sus elementos y se presentan algunos atributos que se pueden obtener a partir de la medición, tales como áreas y perímetros. En el VI ciclo, además del estudio de otros objetos geométricos como rectas, sus posiciones relativas, ángulos y algunos elementos de la geometría espacial, se introduce el álgebra como un lenguaje que permite generalizar resultados de la aritmética, con sus propias reglas, las que se estudian de manera aislada y descontextualizada. En el VII ciclo, se amplía el estudio de los objetos geométricos tridimensionales, se establecen relaciones entre triángulos (de semejanza y congruencia) y se introducen las razones trigonométricas y relaciones entre ellas. Simultáneamente, se presentan elementos en un contexto de geometría analítica plana, sin que se justifique su aparición.

La presentación de estos tópicos se hace sin establecer conexiones entre ellos, pese a que en muchos casos, se emplean los mismos términos aunque con significados diferentes y a que en el desarrollo de estos conceptos sí existieron relaciones.

En particular, la noción de lugar geométrico y los problemas asociados a ella pueden ser empleados para establecer conexiones entre la geometría sin coordenadas, la geometría analítica y el álgebra.

Referencias

Alsina, C. & Trillas, E. (1992). *Lecciones de álgebra y geometría.* Sexta edición. Editorial Gustavo Gili S.A.

Descartes, R. (1954). *The Geometry of Rene Descartes*; translated from french and latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham. Dover Publications, Inc. New York.

Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular (2009). Ministerio de Educación del Perú.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Departamento de Didáctica de las Matemáticas.* Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-6-2. [155 páginas; 2,6 MB] (Recuperable en, `http://www.ugr.es/local/jgodino/`)

Mammana, C. y Villani, V. (Eds.) (1998). *Perspectives on the teaching of geometry for the* 21^{st} *Century.* An ICMI Study. Kluwer Academic Publishers.

Piaget, J., Choquet, G. Dieudonné, J. & Thom, R. (1986). *La enseñanza de las matemáticas modernas.* Alianza Editorial, Madrid.

La tecnología integrada en la enseñanza de las matemáticas

Jesús Victoria Flores Salazar y Francisco Ugarte Guerra
jvflores@pucp.pe y fugarte@pucp.edu.pe
Pontificia Universidad Católica del Perú/IREM-PUCP

Resumen

El presente curso utiliza el software GeoGebra como instrumento mediador para la enseñanza de contenidos matemáticos. Se señala que las actividades de la primera parte del curso son adaptadas del taller de Silva (2011). Los participantes del curso no requieren de conocimientos previos sobre el uso de este ambiente de geometría dinámica. El software contiene diversas herramientas, funciones y recursos que ayudan a trabajar contenidos matemáticos de manera interactiva. Las actividades del curso se desarrollan en dos encuentros. En el primer encuentro, se trabajan actividades de geometría y algebra (uso de herramientas y recursos como el deslizador y el texto con sintaxis en LaTeX) que permiten explorar algunos recursos funciones y herramientas del GeoGebra. En el segundo encuentro se trabajarán actividades relacionadas con el concepto de derivada de una función real de variable real: función derivada, reglas de derivación, recta tangente, criterio de la primera derivada. Para finalizar, se hace una reflexión sobre el uso correcto de estos ambientes tecnológicos en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la matemática.

Palabras clave: GeoGebra; geometría; funciones; derivada.

Consideraciones iniciales

Investigaciones en el área de educación matemática como las de Salazar (2009), Malaspina et al. (2012) y Salazar et al. (2012a; 2012b) muestran que existen preocupaciones cognitivas con relación a la matemática o a los significados construidos para su enseñanza cuando se desarrollan actividades mediadas por ambientes tecnológicos.

Los investigadores afirman que al estudiar la influencia del uso de la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se debe considerar necesariamente relaciones recíprocas entre la tecnología y el desarrollo del pensamiento matemático.

En ese mismo sentido, Artigue (2002) afirma que los ambientes tecnológicos utilizados estratégicamente pueden ser de gran utilidad para que los estudiantes comprueben resultados, refuercen conceptos; o puedan usarlos como herramientas para elaborar conjeturas e inferencias sobre las propiedades de objetos matemáticos representados. En el caso de los profesores, la investigadora afirma que estos ambientes tecnológicos pueden ser utilizados por el profesor como recursos para el desarrollo de su clase.

También, en cuanto al uso de ambientes tecnológicos que tiene como característica fundamental la manipulación directa y el arrastre, Olivero y Robutti (2001) y Grinkraut (2009) coinciden en afirmar que los ambientes de geometría dinámica, como el GeoGebra, poseen ventajas, entre las que señalan, por ejemplo, el lenguaje visual que es un nuevo medio de comunicación de conceptos matemáticos abstractos y la interactividad que estimula a los estudiantes a interesarse en diferentes contenidos matemáticos.

A continuación presentamos algunas características de este ambiente de geometría dinámica.

GeoGebra

El GeoGebra es un software de geometría dinámica para la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos que se puede utilizar tanto en la Educación Básica Regular como en el nivel universitario.

Este ambiente, según Chumpitaz (2013) también es utilizado como un sistema de álgebra computacional (CAS) ya que las funciones básicas del CAS se orientan a disminuir brechas entre la geometría, el álgebra y el cálculo.

Se puede acceder a él mediante la descarga del GeoGebra 4 (`www.GeoGebra.com`) o el GeoGebra 4 Webstart, o bien se puede ejecutar directamente desde internet, tal como se muestra en la figura 1.

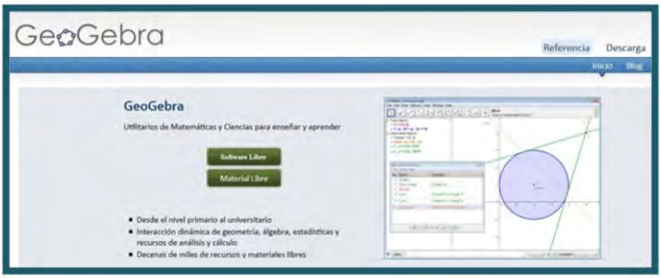


Figure 1: Página web de GeoGebra en español

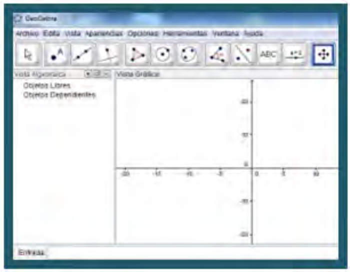
> [...] el GeoGebra ayuda a superar dificultades en la acción de comprobar propiedades y relacionar los objetos matemáticos con sus representaciones. (Chumpitaz, 2013. p. 21)

Asimismo, este software está formado por un conjunto de objetos básicos, como son la barra de herramientas (contiene diferentes cajas de herramientas) y un lenguaje de programación que utiliza una sintaxis específica.

El **GeoGebra**, presenta cuatro apariencias que describimos a seguir:

1. Algebra y gráficos:

Permite por ejemplo, construir gráficos de diferentes funciones dada su regla de correspondencia.

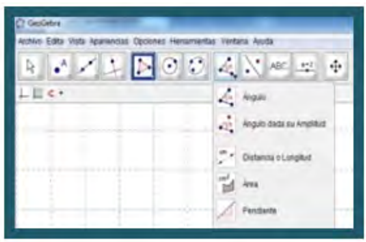


2. Geometría básica:

Se pueden crear puntos, vectores, rectas, segmentos, circunferencias, etc.

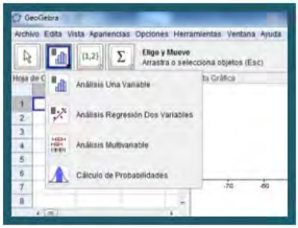
3. Geometría:

Además de lo señalado en la apariencia de geometría básica, se pueden crear polígonos regulares, medir ángulos, etc.



4. Hoja de cálculo y gráficos:

Permite graficar el análisis de regresión, cálculo de probabilidades, etc.



Además de crear gráficos de funciones, en la apariencia de álgebra y gráficos, éstas pueden ser modificadas de forma dinámica y; cualquier modificación realizada dinámicamente sobre el objeto representado, afecta a su expresión algebraica.

Observamos que las herramientas y recursos del software permiten trabajar contenidos matemáticos de manera dinámica, a diferencia de lo que se hace con lápiz y papel.

Actividades del curso

El presente curso utiliza el *GeoGebra* como herramienta para la enseñanza de contenidos matemáticos. Los participantes del curso no requieren de conocimientos previos sobre el uso de este ambiente de geometría dinámica.
El curso consta de dos encuentros cuyos contenidos se muestran en la tabla 1.

Tabla 6: Encuentros y contenidos del curso

Encuentro	Contenidos
Primero	Explorar herramientas y recursos para trabajar contenidos de geometría y de funciones.
Segundo	Explorar herramientas y recursos para trabajar contenidos del cálculo diferencial (derivada).

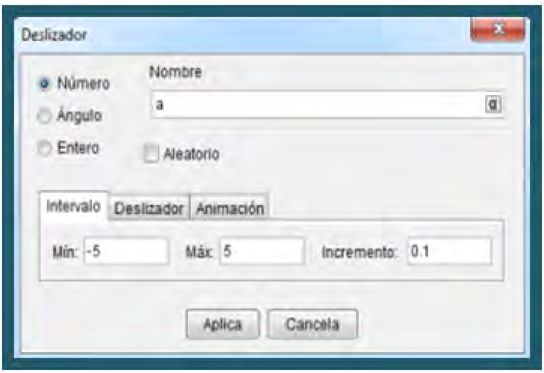
En el primer encuentro se exploran algunos recursos y herramientas del GeoGebra al trabajar actividades orientadas realizar construcciones geométricas y funciones (usan herramientas y recursos como el deslizador y el texto en LaTeX). En el segundo encuentro, se trabajaran actividades relacionadas con el concepto de derivada de funciones reales de variable real: función derivada, reglas de derivación, tangente a la gráfica de una función, crecimiento y derivada de una función.

<u>Primer encuentro</u>

Usando la herramienta "deslizador"

Utilice la apariencia de álgebra y gráficos, geometría o hoja de cálculo y gráficos.

1. Luego, active la herramienta "deslizador"  (caja de herramientas 10) y clique donde quiera que ella aparezca.
2. Aparecerá una ventana, en ella puede editar las propiedades del deslizador como: intervalo (valores mínimo y máximo); deslizador (horizontal o vertical, tamaño, etc.); animación (velocidad que el deslizador cambiará de valor, etc.).



3. Un ejemplo: escriba en el campo de entrada `f(x)=a*x^2` mueva el selector y vea lo que sucede.

4. Ahora clique con el botón derecho del mouse sobre el deslizador, escoja “animación automática” y vea lo que sucede.

5. En el lado inferior izquierdo de la ventana aparecerá un botón del tipo play clicando en este botón, comienza la animación.

Textos con sintaxis en LaTeX

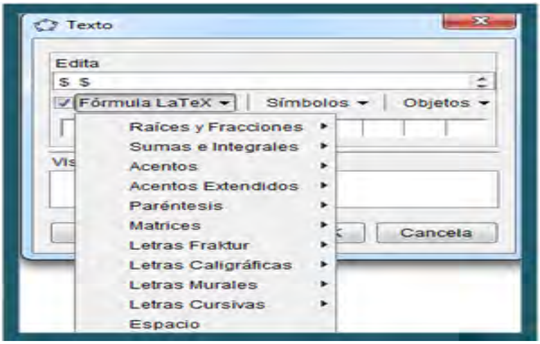
El *GeoGebra* permite que se inserten textos dinámicos en la ventana de visualización y en los deslizadores. Estos textos pueden ser simples o vinculados a alguna variable.

1. Abra una nueva ventana y active la herramienta “insertar texto” (caja de herramientas 10).

2. En la ventana que aparecerá escriba `a^2=` y clique en **ok**. Observe que el texto aparece en la ventana de visualización.

3. Clique con el botón derecho del mouse sobre el texto que acaba de crear y seleccione la opción **editar**. La ventana donde escribió el texto reaparecerá. Luego active la caja de selección LaTeX y clique **ok**.

4. Vea lo que antes era “`a^2=`” ahora es “`a2 =`” con el recurso del LaTeX activado es posible que pueda transformar textos en símbolos matemáticos, como: raíces y fracciones, sumas e integrales, acentos, paréntesis, matrices, etc.



5. Veamos algunos ejemplos en la tabla 2.

Tabla 7: Ejemplos con LaTeX

Sintaxis	Salida
`\sqrt{x^+2}`	$\sqrt{x^+2}$
`\frac{5}{(x-2)^2}`	$\frac{5}{(x-2)^2}$
`\sqrt{\frac{x+y}{3+x^2}}`	$\sqrt{\frac{x+y}{3+x^2}}$

Textos dinámicos

En muchas ocasiones es importante ver lo que ocurre con algunos resultados o construcciones cuando alteramos un parámetro. Veamos un ejemplo.

1. Abra una nueva ventana (puede presionar `ctrl+n`).
2. En el campo de entrada digite a=1 y luego **enter**. Clique con el botón derecho del mouse sobre a=1 en la ventana algebraica y

seleccione la opción **mostrar objeto**, aparecerá un deslizador.

3. Nuevamente active la herramienta "insertar texto" (caja de herramientas 10). Lo que se hará es insertar un texto en el que aparecerá un mensaje fijo y otro que varíe (texto dinámico).

4. La parte fija deberá estar entre comillas. El símbolo + unirá la parte fija con la parte variable. La parte variable quedará de preferencia entre paréntesis. Para ello haga lo siguiente: escriba "`a^2=`"`+(a^2)` y no se olvide de señalar la caja que activa la sintaxis del LaTeX.

5. Seleccione la herramienta mover y modifique el valor del parámetro "a" usando el deslizador. ¿qué ocurre con el texto?

Actividad 1: Teorema de Tales con GeoGebra.

1. Para esta actividad puede utilizar la apariencia geometría y ocultar la cuadrícula.

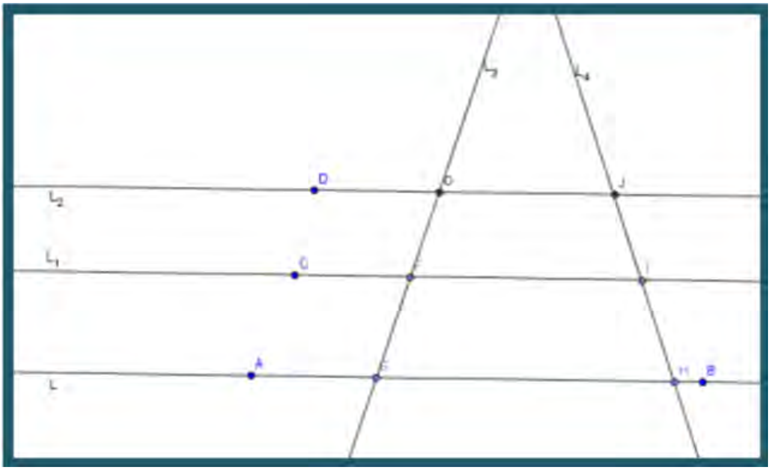
2. Utilice la herramienta "recta definida por dos puntos" (ventana 2), dibuje una recta.

3. Marque dos puntos C y D fuera de la recta dibujada y utilice la herramienta "recta paralela" (ventana 4) y dibuje dos rectas paralelas que pasen por los puntos C y D.

4. Seleccione la herramienta "nuevo punto" y clique sobre la recta L (que pasa por los puntos A y B). Un punto E se creará sobre la recta, además marque un punto F sobre la recta L_1.

5. Active la herramienta "recta definida por dos puntos" y cree una recta por los puntos E y F (llamaremos L_2 a esta recta). Repita este procedimiento para crear las rectas L_3 y L_4, tal como muestra la figura 2.

Figure 2: Rectas paralelas y transversales



6. Con la herramienta "distancia" mida las distancias HI, IJ, EF y FG.

6. Seleccione la herramienta "insertar texto" clique donde quiera que aparezca el texto e ingrese el siguiente texto:

```
"\frac{HI} {IJ}="+(distanciaHI / distanciaIJ)
```

   Marque en la caja LaTeX y clique **ok**.

6. Con la herramienta "insertar texto" clique donde quiera que aparezca el texto e ingrese el siguiente texto:

```
"\frac{EF} {FG}="+(distanciaEF / distanciaFG)
```

   Marque en la caja LaTeX y clique **ok**.

Momento de reflexión:

Algunos aspectos que debe observar:

1. Presione **esc** y arrastre el punto F. ¿Qué sucede con la razón EF/FG y HI/IJ?
2. Ahora mueva el punto C. ¿Qué sucede con la razón EF/FG? Y ¿HI/IJ? ¿Se modifica el resultado de la división? ¿Qué sucede con la relación entre EF/FG y HI/IJ?
3. Ahora modifique la posición de cualquier punto y vea que sucede con EF/FG y HI/IJ. A partir de lo observado ¿qué podría afirmar sobre $\frac{EF}{FG} = \frac{HI}{IJ}$?
4. ¿Puede identificar otras razones que darán el mismo resultado?

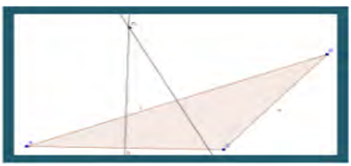
Actividad 2: Construcción del circuncentro.

Para esta actividad puede utilizar la apariencia geometría y ocultar la cuadrícula.

1. Seleccione la herramienta "polígono" y cree un triángulo con vértices en los puntos A, B y C.

2. Active la herramienta "mediatriz" (ventana 4) y clique sobre el lado c y sobre el lado b.

3. Seleccione la herramienta "intersección de dos objetos" y clique sobre las rectas. Un punto D (llamado circuncentro) será creado como muestra la figura.



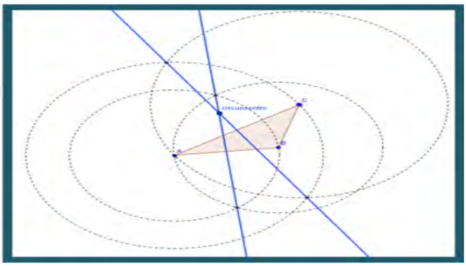
Observación: otra manera de construir el circuncentro.

1. Para esta actividad puede utilizar la apariencia geometría y ocultar la cuadrícula.

2. Seleccione la herramienta "polígono" y cree un triángulo con vértices en los puntos A, B y C.

3. Construya la mediatriz de los lados b y c del triángulo ABC como muestra la figura.

4. Seleccione la herramienta "intersección de dos objetos" y clique sobre las rectas. Un punto D (llamado circuncentro) será creado como muestra la figura.



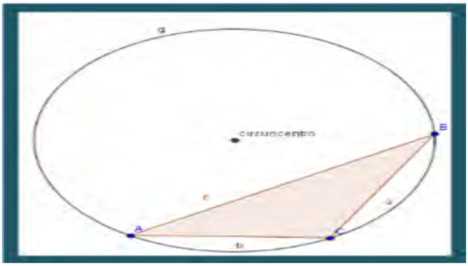
Momento de reflexión (a):

Algunos aspectos que debe observar:
Piense sobre la construcción hecha: ¿será que las mediatrices de cualquier triangulo se encontrarán siempre en un mismo punto? Para ayudarlo en la respuesta haga lo siguiente: presione **esc** y arrastre cualquier vértice, ¿qué observa?

Continuaremos nuestra actividad con una pregunta: ¿el circuncentro tiene alguna propiedad especial?

5. Active la herramienta "mostrar y ocultar objetos" (ventana 11) y esconda las mediatrices de los lados c y b.

5. Modifiquemos el nombre del punto D para **circuncentro**. Para ello, clique con el botón derecho y seleccione la opción "renombrar" y en la ventana que aparecerá escriba circuncentro, luego clique **ok**.



5. Active la herramienta "circunferencia dado su centro y uno de sus puntos" (ventana 6) clique en el punto circuncentro y en uno de los vértices de triángulo. Será creada una circunferencia g. ¿qué observa?

Momento de reflexión (b):

1. Escriba lo que observó.
2. Parece que el triángulo está inscrito en la circunferencia. ¿Si el triángulo fuera diferente esto podría suceder?

Actividad 3: Construcción de un mosaico utilizando la herramienta "traslación" del *GeoGebra*.

1. Para esta construcción debe utilizar la apariencia de geometría básica.

2. Construya un cuadrado $ABCD$.
3. Construya un triángulo con un lado común al lado AC del cuadrado.
4. Cree un vector $\overrightarrow{AB}$.
5. Traslade el triángulo según ese vector y grafique el polígono $ABCDEF$.
6. Traslade el polígono ABCDEF según el vector $\overrightarrow{AB}$.
7. Cree el vector $\overrightarrow{AC}$ y traslade nuevamente el polígono según el vector.

> También puede modificar el color del mosaico construido utilizando los recursos del *GeoGebra*.

Actividad 4: Construcción del dominio y rango de una función acotada.

1. Para esta construcción utilice la apariencia algebra y gráficos y cambie el fondo a cuadricula.
2. En el campo de entrada escriba directamente en el campo de entrada la palabra función y de inmediato aparecerá el comando:

   ```
   Función[<Función>,<valor inicial de x>,<valor final de x>]
   ```

3. Si no apareciera el comando anterior, escriba
   `Función[-(x-2)^2+5,1,4]`
   y presione *enter*. Aparecerá la gráfica de la función
   $f(x) = -(x-2)^2 + 5, x \in [1;4]$.

4. Para cambiar el color y el estilo de la curva presione el botón derecho del mouse y aparecerá un menú. Seleccione *Propiedades de Objeto*. Usted puede escoger el atributo que desea modificar.

5. Active la opción deslizador (10^a ventana). Luego indique el intervalo desde 1 hasta 4.

6. Escriba en el campo de entrada la ecuación: $x = a$. De esta manera se conecta la gráfica de la función con el deslizador. Lo que se desea es buscar la intersección de dicha recta con la gráfica de la función y con el eje X, ubicando el punto A y B respectivamente. Para ello se debe ir a la barra de menú y ubicar el botón: intersección de objetos, lo activamos y marcamos las curvas para obtener a los puntos A y B.

7. Clique (botón derecho del mouse) sobre la recta ocúltela. Ubique luego la herramienta segmento $\overline{AB}$ (use atributos para que tenga: color rojo y línea punteada).

8. Trace una recta perpendicular que pase por A y sea perpendicular al eje Y, y ubique el punto C.

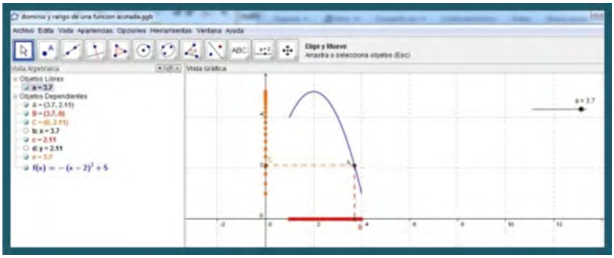
9. Oculte la recta, y trace el segmento $\overline{AC}$. Cambie los atributos del segmento (naranja de grosor 3 y tipo de línea punteada).

10. Manipule el deslizador y cambie los valores de a ¿qué observa?

11. Clique en los puntos A y B y active la herramienta rastro. De este manera al mover los valores de a en el deslizador, se moverá los puntos A y B de los ejes X e Y respectivamente, observándose así, el dominio y rango de la función.

12. Active la opción deslizador y con el botón derecho del mouse sobre él active la opción animación automática. De esa manera podrá observar (ver figura abajo) la representación gráfica el dominio y rango de una función acotada.

Figure 3: Dominio y rango de una función acotada



Actividad 5: noción de derivada a partir de rectas tangentes.

1. Ingrese la función $f(x) = x^3 - 2x + 4$ en el campo de entrada.

2. Utilice el deslizador (caja de herramientas 10), clique en la ventana geométrica. En la caja del deslizador exhibida, atribuya el valor de a variando de -5 (min.) a 5 (máx.).

3. Ingrese el punto A en el gráfico colocando en el campo de entrada la expresión $A = (a, f(a))$.

4. Utilice la herramienta recta tangente (4^a ventana). Clique en el gráfico de la función y en el punto A, así obtendrá la recta tangente (b) al gráfico en este punto.

5. Con la herramienta pendiente (8^a ventana), clique en la recta tangente, así obtendrá el valor de m que corresponderá a su inclinación en ese punto.

6. En el campo de entrada, ingrese el punto B con las siguientes coordenadas (a, m). Con el botón derecho del mouse en el punto B, active la opción habilitar rastro.

7. Mueva el parámetro a (con la opción mover 1^a ventana) y observe la curva obtenida por el rastro dejado. La curva resultante de la unión de los puntos dejados por el rastro, ¿corresponde al gráfico de una función? ¿Qué relación tienen los dos gráficos?

Observación

Puede graficar la derivada de una función directamente de la siguiente manera:

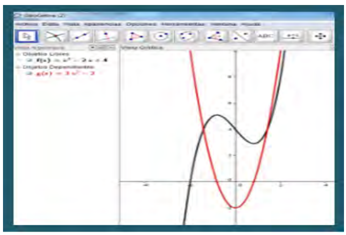
1. Ingrese en el campo de entrada la función:

$$f(x) = x^3 - 2x + 4$$

2. Active la ayuda de entrada (botón en el lado inferior derecho de la pantalla) allí se abrirá una ventana.
3. Escoja la opción función y cálculo, en seguida Derivada. Clique en pega para que el comando derivada aparezca en el campo de entrada e ingrese $f(x)$ y *enter*.
4. Aparecerá representada la gráfica de la derivada de $f(x)$ en la ventana gráfica y en la algebraica su derivada. (ver figura).

Segundo encuentro

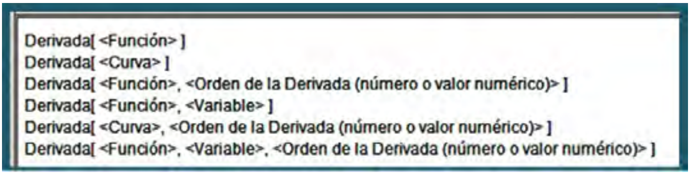
1. Los cálculos podrán realizarse usando el programa *GeoGebra*.
2. Aunque el ejercicio no lo pida, Ud. puede graficar las funciones indicadas.
3. En el programa *GeoGebra* encuentre un comando llamado Derivada.



4. La expresión $f'(x)$ significa: derivada de la función f en x.
5. La expresión $f'(2)$ significa: derivada de la función f en $x = 2$ (Primero se deriva y luego el resultado se reemplaza en $x = 2$).

El comando Derivada

En la parte inferior de la ventana principal, seleccione Entrada y escriba Deriva, a continuación le aparecerá la sintaxis correspondiente al comando, tal como se muestra a continuación:



El *GeoGebra* tiene también otros comandos asociados como Derivada Implícita y Derivada Paramétrica, para ver su sintaxis realice la misma operación anterior o bien utilice la opción Ayuda de Entrada, en la parte inferior derecha, con ella accederá a la lista completa de comandos o si desea a los comandos agrupados por temas.

Actividad 1: Las reglas de derivación

1. Sean $f(x) = x^2 + 3x^3 + x^5 + x^10,\ g(x) = cos(x) + \sqrt{x+1}$.
2. Calcule f'. Respecto al resultado ¿qué obtiene una función o un número?
   a. ¿Cuál es el dominio de g?
   b. Calcule g' ¿cuál es el dominio de g'?

<u>**Momento de reflexión:**</u>

Existe alguna relación entre los dominios de una función y su derivada, ¿por qué?

1. Sean las funciones $f(x) = x^3 - 6x$ y $g(x) = 6x - 12$. Calcule:
   a) $[f(x)]'$
   b) $[g(x)]'$
   c) $[f(x)]' + [g(x)]'$
   d) $[f(x) + g(x)]'$
   e) $[f(x)]' \cdot [g(x)]'$
   f) $[f(x) \cdot g(x)]'$
2. Halle las derivadas de las siguientes funciones:
   a) $f(x) = C$, donde C es una contante real.
   b) $f(x) = x^n$, donde n es un número racional.
   c) $f(x) = \sqrt{x}$
   d) $f(x) = \frac{1}{x}$
   e) $f(x) = sen(x)$
   f) $f(x) = cos(x)$

Nota: en el programa sen(x) se escribe: sin(x)

Actividad 2: Rectas tangentes

Grafique la función $f(x) = \frac{1}{(x-3)}$ y ubique el punto $Q(4, 1)$ en el plano.

a) Calcule $f'(4)$.

b) Determine la ecuación de la recta L que pase por el punto Q con pendiente $f'(4)$.

c) Grafique la recta L en el mismo plano en el que graficó la función f.

d) ¿Qué puede afirmar acerca de la recta L respecto a la gráfica de la función f?

Momento de reflexión:

¿A qué llamamos la recta tangente a una curva en un punto?

Actividad 3: Criterio de la primera derivada

Sean: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + x + 5$.

a) ¿En qué intervalo f crece, en qué intervalo f decrece, en qué punto cambia de decreciente a creciente?

b) Halle f' ¿en qué intervalo f' es negativa, en qué intervalo f' es positiva, en qué punto f' es cero?

c) ¿Encuentra alguna relación entre los resultados obtenidos en a) y b)?

d) Repita las preguntas a),b) y c) pero con la función g.

e) ¿Podría escribir una conjetura respecto a la relación entre función y derivada?

Momento de reflexión:

¿Hasta qué punto podemos asegurar que las conclusiones obtenidas en unos ejemplos son válidas siempre?

Consideraciones finales

El uso del *GeoGebra* favorece el desarrollo del pensamiento geométrico de los sujetos. Porque las construcciones geométricas, que se pueden trabajar en este ambiente, permiten que los estudiantes conjeturen propiedades de los objetos geométricos representados asimismo, ayuda a que el sujeto realice múltiples representaciones que le permiten desarrollar estrategias de resolución de situaciones problema.

Este software, reúne todas las ventajas didácticas que poseen otros ambientes de geometría dinámica (Cabri II plus, etc.) pero además la presencia de una ventana geométrica y otra algebraica posibilita el tránsito "natural" de la geometría sintética a la geometría analítica.

Agradecemos a la Dra. Maria José Ferreira da Silva por facilitar algunos materiales que fueron adaptados para el desarrollo de este curso.

Referencias

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7.* Kluwer Academic Publishers, 245-274.

Chumpitaz, L. D. (2013). *La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería.* Tesis de maestría de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.

Grinkraut, M. L. (2009). *Formação de professores envolvendo a prova matemática: um olhar sobre o desenvolvimento profissional.* Tesis doctoral, Pontifícia Universidad Católica de São Paulo. São Paulo, Brasil.

Malaspina, U. J.; Ugarte, F.; Salazar, J. V. F.; Osorio A.; Gaita, C. (2012). *Didáctica de las Matemáticas: Avances y Desafíos Actuales en la Educación Básica Regular.* Editorial Hozlo: Lima, Perú. ISBN: 978-612-46343-0-7.

Olivero, F.; Robutti, O. (2001). *Measures in Cabri as a bridge between perception and theory.* En: Proceedings of the 25th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education. Netherlands: PME 25. (4), 9-16.

Salazar, J. V. F. (2009). *Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço.* Tesis doctoral, Pontifícia Universidad Católica de São Paulo. São Paulo, Brasil.

Salazar, J. V. F.; Malaspina, U. J.; Gaita, C.; Ugarte, F. (2012a). *Three-Dimensional Geometric Transformations Using Dynamic Geometry: A View from the Instrumental Genesis.* En: 12th International Congress on Mathematical Education. Corea: ICME 12. (1), 2435-2443.

Salazar, J. V. F.; Gaita, C.; Beteta, M. (2012b). *Introducción a la Geometría Espacial con CABRI 3D.* En: VI Congreso Iberoamericano de Cabri (IBEROCABRI 2012) PUCP. Lima: PUCP, (12), 278-285.

Jesus Victoria Flores Salazar.
Profesora del Departamento de Ciencias/Sección Matemática y de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú.
Miembro de los grupos de Investigación DIMAT/PUCP y PEAMAT/PUC-SP.
Pos-doctorado en Educación Matemática del Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq/Brasil).

Se terminó de imprimir en los talleres de
la Editorial Moshera S.R.L.
Jr. Tacna 2969, San Martín de Porres
Telefax: 567-9299
editorialmoshera@hotmail.com
Diciembre, 2014

ISBN: 978-612-46647-5-5
9 786124 664755